POLITECNICO DI TORINO

I Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

Analisi di formulazione agli elementi finiti shell avanzati per problemi meccanici ed elettromeccanici

Candidato:

Stefano Valvano

Relatori:

Prof. Erasmo Carrera
Ph.D. Maria Cinefra

Ottobre 2013

Indice

1 Introduzione **6**
1.1 Strutture composite avanzate . . . 7
1.2 Materiali compositi . . . 7
1.3 Materiali piezoelettrici . . . 8

2 Modelli shell avanzati **10**
2.1 Unified Formulation . . . 10
2.2 Relazioni geometriche . . . 11
2.2.1 Geometria doppia curvatura . . . 12
2.2.2 Relazioni geometriche multicampo . . . 13
2.3 Equazioni costitutive . . . 13
2.3.1 Equazioni per i materiali compositi . . . 14
2.3.2 Problemi multicampo . . . 16
2.4 Principio variazionale . . . 17
2.4.1 Principle of Virtual Displacements . . . 17
2.5 Acronimi dei modelli CUF . . . 18

3 Equazioni di governo in forma debole **20**
3.1 Preliminari . . . 20
3.2 PVD(u) per il caso puramente meccanico . . . 22
3.2.1 Nuclei per le strutture a guscio con carico puramente meccanico . . . 25
3.2.2 Nuclei per le strutture piastra con carico puramente meccanico . . . 27
3.3 PVD(u,Φ) per il caso elettromeccanico . . . 29
3.3.1 Nuclei per le strutture a guscio con carico elettromeccanico . . . 33
3.3.2 Nuclei per le strutture piastra con carico elettromeccanico . . . 36

4 Metodo MITC **39**
4.1 Preliminari . . . 39
4.2 Elemento CUF MITC . . . 40
4.3 PVD(u) per il caso puramente meccanico MITC . . . 45
4.3.1 Nuclei MITC per le strutture a guscio con carico puramente meccanico . . . 48
4.4 PVD(u,Φ) per il caso elettromeccanico MITC . . . 51

4.4.1 Nuclei MITC per le strutture a guscio con carico elettromeccanico 54

5 Risultati per carichi puramente meccanici 59

5.1 Pannello shell sotto carichi puramente meccanici 60

5.1.1 Laminazione simmetrica [0°/90°/0°], numero strati N = 3 61

5.1.2 Laminazione asimmetrica [0°/90°/0°/90°], numero strati N = 4 . 73

5.1.3 Laminazione simmetrica [0°/90°/0°/90°/0°], numero strati N = 5 83

5.2 Casi studio sotto carichi puramente meccanici 92

5.2.1 Laminazione asimmetrica [45°/ − 45°], numero strati N = 2 , semplicemente appoggiata,con carico bi-sinusoidale 94

5.2.2 Laminazione asimmetrica [45°/45°/ − 45°/ − 45°], numero strati N = 4, semplicemente appoggiata,con carico bi-sinusoidale 102

5.2.3 Laminazione asimmetrica [45°/45°/45°/ − 45°/ − 45°/ − 45°], numero strati N = 6, semplicemente appoggiata,con carico bi-sinusoidale 110

5.2.4 Laminazione simmetrica [45°/ − 45°/45°], numero strati N = 3, semplicemente appoggiata,con carico bi-sinusoidale 118

5.2.5 Laminazione simmetrica [0°/90°/0°], numero strati N = 3, incastrata su due lati paralleli e libera sugli altri due, con carico bi-sinusoidale 126

5.2.6 Laminazione simmetrica [0°/0°/90°/90°/0°/0°], numero strati N = 6, incastrata su due lati paralleli e libera sugli altri due, con carico bi-sinusoidale 134

5.2.7 Laminazione simmetrica [90°/0°/90°], numero strati N = 3, semplicemente appoggiata,con carico concentrato in mezzeria 141

5.2.8 Laminazione simmetrica [90°/90°/0°/0°/90°/90°], numero strati N = 6, semplicemente appoggiata,con carico concentrato in mezzeria 149

6 Risultati per carichi elettro-meccanici 156

6.1 Piastra composita con strati in materiale piezoelettrico sotto carichi elettromeccanici 157

6.1.1 Caso sensore piastra con strati N = 4 159

6.1.2 Caso attuatore piastra con strati N = 4 171

6.2 Shell composito con strati in materiale piezoelettrico sotto carichi elettromeccanici 182

6.2.1 Caso sensore shell mono-strato 184

6.2.2 Caso attuatore shell mono-strato 186

7 Conclusioni 188

7.1 Prospettive 189

Bibliografia 191

Premessa

Lo scopo di questa tesi è quello di estendere ai gusci con/senza strati in materiale piezoelettrico l'analisi meccanica e elettro-meccanica con una formulazione debole, detta anche agli elementi finiti, che in passato è stata effettuata sulle piastre, utilizzando la Formulazione Unificata sviluppata dal Prof. Carrera.
Nel primo capitolo, vengono introdotti i materiali compositi e quelli piezoelettrici.
Nel secondo capitolo, si espone la Formulazione Unificata e le teorie in essa contenute. Si evidenzia che, da un punto di vista geometrico, la piastra non é altro che la degenerazione del guscio, pertanto, annullando alcuni parametri presenti nelle relazioni geometriche del guscio, si ottengono quelle della piastra. Vengono richiamate, inoltre, le equazioni costitutive e il principio variazionale degli spostamenti virtuali (PVD) che serviranno per la scrittura dei nuclei fondamentali.
Il terzo capitolo introduce il problema elastico ed elettro-elastico di piastre e gusci. Tramite l'applicazione del PVD (Principle of Virtual Displacement) e delle relazioni viste nel secondo capitolo, si giunge alla scrittura dei nuclei fondamentali con formulazione agli elementi finiti per il guscio e per la piastra soggetti a carichi meccanici e elettro-meccanici.
Nel quarto capitolo, viene esposto il metodo MITC (*Mixed Interpolation of Tensorial Components*). Il metodo è utilizzato per contrastare il *membrane e shear locking*. La differente scelta della strategia di interpolazione delle funzioni di forma porta ad una nuova espressione delle relazioni geometriche. Vengono dedotti i nuovi nuclei fondamentali per i gusci soggetti a carico meccanico ed elettro-meccanico.
Nel quinto capitolo, viene analizzato un guscio a doppia curvatura soggetto a carichi puramente meccanici. In una prima parte vengono studiati dei casi presenti in letteratura per validare l'elemento finito ottenuto nei capitoli precedenti. Nella seconda parte sono stati affrontati dei casi nuovi, non presenti in letteratura, che non possono essere studiati con il metodo analitico ma solo con una trattazione agli elementi finiti.
Nel sesto capitolo, vengono analizzati sia la piastra che lo *shell* entrambi soggetti a carichi elettro-meccanici. Imponendo un carico puramente meccanico si intende che la struttura piezoelettrica funga da sensore. Imponendo un carico elettrico si intende che la struttura piezoelettrica funga da attuatore.

Capitolo 1

Introduzione

La tecnologia delle strutture dei sistemi aerospaziali è costituita da varie componenti di tencologie come quelle dello sviluppo dei materiali e quelle dell'analisi, la progettazione e la prova di strutture. I materiali e le strutture sono in larga parte responsabili dell'aumento delle prestazioni dei sistemi aerospaziali. Il miglioramento delle tecnologie computazionali delle strutture e lo sviluppo di materiali compositi avanzati ottenuti negli ultimi trenta anni hanno incrementato le prestazioni strutturali, ridotto i rischi di missione e accorciato i tempi di sviluppo. Il progetto di futuri sistemi aerospaziali dovrà scontrarsi con nuove sfide. Per gli aeromobili, questo include l'economicità, la sicurezza e la sostenibilità ambientale. Per gli aeromobili militari, ci sarà un cambiamento dalle migliori prestazioni a prestazioni accettabili al minor costo possibile. Per i sistemi spaziali, le nuove sfide sono un risultato di un spostamento di strategia dalle missioni a lungo termine, complesse e costose a quelle semplici, veloci e meno costose. I materiali e le strutture, in aggiunta alle nuove tecnologie per il futuro dell'aeronautica e dei sistemi spaziali, continuano ad essere gli elementi chiave nel determinare l'affidabilità, le prestazioni, la testabilità e i costi effettivi dei sistemi aerospaziali. Per molti dei futuri aeromobili, lo sviluppo e la diffusione delle nuove tecnologie delle strutture possono avere un impatto maggiore sulla riduzione dei costi operativi e del peso rispetto a tutte le altre tecnologie.

In molte dichiarazioni nazionale ed internazionali, è stato affermato che gli sviluppi nelle strutture avanzate, nelle industrie automobilistiche e navali, come in aeronautica e nelle scienze spaziali, sono subordinate allo sviluppo delle cosiddette "smart structures". Le smart structures sono sistemi che sono capaci sentire e reagire al loro ambiente, attraverso l'integrazione di vari elementi, come sensori ed attuatori. Le smart structures possono variare la loro forma con grande precisione senza utilizzare i classici attuatori meccanici, smorzare vibrazioni e rumore acustico, e monitorare inoltre lo stato di integrità della struttura.

Le "smart structures" o strutture intelligenti coinvolgono interazioni tra i campi meccanici ed elettrici. I modelli classici per le travi, le piastre e i gusci sono stati svilup-

pati originariamente per calcolare i campi di tensione dovuti all'applicazione dei carichi meccanici. Questi modelli classici hanno dimostrato alcune difficoltà ed incertezze nelle analisi delle strutture intelligenti. I carichi elettrici sono di fatto "field loadings" o carichi di campo che richiedono l'uso di avanzati modelli strutturali. Le smart structures, in molte applicazioni, sono strutture multistrato con strati/porzioni in materiale piezoelettrico. Le strutture multistrato hanno, per definizione, molte "interfacce". Le interfacce conducono alle discontinuità lungo lo spessore delle proprietà sia meccaniche che elettriche. In questo lavoro sono state fatte assunzioni sugli spostamenti. Sono state usate estensioni del principio degli spostamenti virtuali (PVD) per derivare le equazioni di governo e le matrici dell'elemento finito di strutture laminate piastra/guscio con strati integrati in materiale piezoelettrico. Vengono introdotte assunzioni sulle variabili incognite attraverso l'applicazione della Carrera Unified Formulation, dove l'accuratezza dei modelli può essere arricchita preservando la forma delle equazioni di governo e delle matrici dell'elemento finito, che sono scritte in termini di nuclei fondamentali.

1.1 Strutture composite avanzate

Le strutture avanzate considerate in questo lavoro sono strutture multistrato bidimensionali aventi differenti proprietà : meccaniche o elettriche. Come strutture bidimensionali vengono considerate quelle aventi una dimensione, solitamente lo spessore,trascurabile rispetto alle altre due dimensioni contenute nel piano. Tipiche strutture bidimensionali sono le piastre e i gusci. Le piastre non hanno curvatura lungo le due direzioni nel piano, sono pannelli piatti. I gusci invece hanno curvatura lungo le due direzioni nel piano. Nel caso delle piastre, viene utilizzato un sistema di riferimento rettilineo cartesiano. Nel caso dei gusci, è necessaria l'introduzione di un sistema di riferimento curvilineo. Sia per le piastre che per i gusci, il terzo asse lungo la direzione dello spessore è rettilineo.

1.2 Materiali compositi

I materiali compositi sono costituiti da due o più materiali combinati fra loro aventi proprietà selezionate che non possono essere ottenute utilizzando solamente uno dei materiali costituenti [1], [2]. Tipici esempi sono i materiali compositi con fibre rinforzanti che hanno fibre con un alto modulo e alta tenacità immerse in una matrice di altro materiale. In alcuni compositi, le fibre sono la componente principalmente deputata all'assorbimento del carico e la matrice invece ha il compito di mantenere unite le fibre, quest'ultima agisce come un ripartitore medio di carico tra le fibre, e le protegge dal deterioramento causato dall'esposizione all'ambiente esterno. Le fibre hanno un elevato rapporto lunghezza/diametro e le loro proprietà sono massimizzate in una specifica direzione. Paradossalmente, le fibre corte (whiskers) mostrano migliori comportamenti strutturali rispetto alle fibre lunghe. I materiali costituenti fibre e matrice solitamente impiegati nei compositi possono essere metallici o non-metallici. I materiali costituenti le fibre possono essere metalli comuni come l'alluminio, rame, ferro, nichel, acciaio, titanio,

o materiali organici come il vetro, boro e la grafite [1].

Nel caso di applicazioni strutturali, per esempio nel campo aeronautico, i materiali compositi a fibra rinforzante sono spesso strati sottili chiamati *lamine*. Tipici elementi strutturali, come le barre, travi, piastre o gusci sono ottenuti mediante sovrapposizione di strati, l'orientamento delle fibre in ogni lamina e l'ordine della sequenza degli strati può essere scelto per ottenere la desiderata tenacità e rigidezza in funzione dell'applicazione.

I principali svantaggi dei laminati costituiti da materiali compositi a fibre rinforzanti sono le delaminazioni e il fiber debonding. La delaminazione è causata dall'errato accoppiamento delle proprietà dei materiali costituenti gli strati adiacenti, che produce tensione di taglio tra gli strati, specialmente sui bordi del laminato. Il fiber debonding è causata dall'errato accoppiamento delle proprietà dei materiali della fibra e della matrice in cui è immersa. Inoltre, durante la produzione stessa dei laminati, possono nascere difetti nei materiali come i vuoti interlaminari, delaminazione, errato orientamento delle fibre, fibre danneggiate e variazione dello spessore del laminato [3].

Nella formulazione delle equazioni costitutive di una lamina si assume che: (a) una lamina è considerata un continuo: non esistono spazi vuoti o interruzioni; (b) una lamina si comporta come un materiale lineare elastico. L'assunzione (a) permette di considerare il comportamento macromeccanico di una lamina. L'assunzione (b) implica che la legge generalizzata di Hooke sia valida.

1.3 Materiali piezoelettrici

Il fenomeno piezoelettrico è una peculiarità di una certa classe di materiali cristallini. L'effetto piezoelettrico è una conversione lineare di energia tra il campo meccanico e quello elettrico. La conversione lineare tra i due campi può avvenire in entrambe le direzioni, definendo un effetto piezoelettrico diretto e inverso. L'effetto piezoelettrico diretto genera una polarizzazione elettrica se viene applicata una tensione meccanica. Al contrario, l'effetto piezoelettrico inverso induce tensione meccanica o deformazione se si applica un campo elettrico. Questi due effetti rappresentano l'accoppiamento tra il campo meccanico ed elettrico, che è matematicamente espresso dal significato dei coefficienti piezoelettrici. Le prime applicazione dei materiali piezoelettrici sono state sensori e sorgenti sonore e ad ultrasuoni. Questi utilizzi sono ancora attuali, ma, in anni recenti, la piezoelettricità ha ritrovato interesse, nelle strutture intelligenti attive con l'auto-monitoraggio e le capacità auto-adattative [4]- [5]. Tipiche applicazioni dei materiali piezoelettrici in campo aerospaziale sono:

Smorzamento delle vibrazioni. Praticamente ogni struttura in ingegneria aerospaziale è soggetta a vibrazioni. In alcuni casi come per i carichi dinamici può essere più pericolo che per i carichi statici. Implementando sensori ed attuatori nelle strutture, le vibrazioni dinamiche possono essere misurate e poi smorzate in mo-

do attivo. Tipici esempi sono problemi di vibrazioni per le pale dei rotori degli elicotteri, smorzamento sonoro nel *cockpit* o nella cabina degli aerei civili.

Adattamento di forma delle superfici aerodinamiche. Nei moderni aeroplani le superfici aerodinamiche possono essere ottimizzate solo per certe velocità di volo e a certe quote. Le ali che sono capaci di cambiare la loro geometria in accordo con la richiesta del momento possono portare un aumento dell'efficienza.

Controlli aeroelastici attivi. Tipici problemi di aeroelasticità come il *flutter* o il *buffeting* possono essere ridotti con l'uso di materiali adattativi.

Controllo di forma di dispositivi ottici ed elettromagnetici. Le strutture in campo aerospaziale sono soggette a rapide ed elevate variazioni di temperatura dovute al cambiamento dell'esposizione ai raggi solari. Superfici ottiche come lenti e specchi, antenne elettromagnetiche e riflettori sono molto sensibili alle deformazioni termiche. Un rimedio a questo problema potrebbe essere l'uso di materiali adattativi.

Monitoraggio dell'integrità strutturale. Nelle strutture aerospaziali le cricche microscopiche sono tollerabili fino ad un certo limite. Le smart structures possono monitorare queste cricche e di conseguenza applicare un meccanismo di controllo addizionale per mantenere la sicurezza.

Capitolo 2

Modelli shell avanzati

Nella *Carrera's Unified Formulation* (CUF) sono contenuti differenti modelli avanzati guscio / piastra (*shell/plate*). La CUF permette di ottenere, in maniera generale ed unificata, molti modelli che differiscono in funzione della scelta dell'ordine di espansione lungo lo spessore, dal tipo di approccio come *equivalent single layer* o *layer wise* e dal principio variazionale utilizzato. Questi modelli sono stati raffinati in questo lavoro per i gusci, in accordo con le differenti assunzioni geometriche: la piastra è un caso particolare del guscio, ottenibile imponendo un raggio di curvatura infinito. Considerando le equazioni costitutive appropriate, la CUF può essere applicata per l'analisi di materiali avanzati. Le teorie elaborate sono teorie di alto ordine di espansione basate sul principio degli spostamenti virtuali e possono essere estese allo studio di problemi multi-campo considerando, ad esempio per i problemi elettro-meccanici, la modellizzazione del profilo del potenziale elettrico. Un sistema di acronimi è introdotto per caratterizzare queste teorie.

2.1 Unified Formulation

La caratteristica principale della *Unified Formulation* di Carrera [6] (CUF) è il modo unificante con cui sono trattate le variabili di campo. Se si considera la formulazione agli spostamenti, il campo degli spostamenti è scritto utilizzando delle funzioni approssimanti lungo la direzione dello spessore nel modo seguente:

$$\boldsymbol{u}^k(\alpha,\beta,z) = F_\tau(z)\boldsymbol{u}^k_\tau(\alpha,\beta)\ , \quad \delta\boldsymbol{u}^k(\alpha,\beta,z) = F_s(z)\delta\boldsymbol{u}^k_s(\alpha,\beta)\ , \quad \tau,s = 0,1,...,N\ , \tag{2.1}$$

dove (α,β,z) è un sistema di riferimento curvilineo, che verrà definito nella sezione seguente, e lo spostamento $\boldsymbol{u} = \{u,v,w\}$ è riferito al sistema. δ indica la variazione virtuale e k identifica lo strato. F_τ e F_s sono le cosiddette funzioni di spessore che dipendono solo da z. $\boldsymbol{u}_s$ sono le variabili incognite dipendenti dalle coordinate α e β. τ e s sono gli indici e N è l'ordine di espansione lungo lo spessore assunto per gli spostamenti.

Nel caso dei modelli *Equivalent Single Layer* (ESL), viene utilizzata un'espansione di Taylor come funzione di spessore:

$$\boldsymbol{u} = F_0\,\boldsymbol{u}_0 + F_1\,\boldsymbol{u}_1 + \ldots + F_N\,\boldsymbol{u}_N = F_s\,\boldsymbol{u}_s\,, \qquad s = 0, 1, \ldots, N\,, \tag{2.2}$$

$$F_0 = (z)^0 = 1, \quad F_1 = (z)^1 = z, \quad \ldots, \quad F_N = (z)^N\,. \tag{2.3}$$

Teorie classiche, come la *First-order Shear Deformation Theory* (FSDT), possono essere ottenute dal modello ESL con $N = 1$, imponendo uno spostamento trasversale costante lungo lo spessore utilizzando una penalty techniques. La *Classical Lamination Theory* (CLT) può essere anche ottenuta dalla FSDT tramite una opportuna *penalty technique* che impone un fattore di taglio infinito (*shear corrector factor*). E' importante ricordare che le teorie ESL che hanno uno spostamento trasversale costante e una deformazione trasversale normale ε_{zz} nulla e la teoria ESL del primo ordine mostrano il fenomeno del *Poisson's locking*; questo può verificarsi per via delle condizioni di deformazione piana contenute nelle equazioni costitutive [7], [8].

Nel caso dei modelli Layer-Wise (LW), lo spostamento è definito al k-strato:

$$\boldsymbol{u}^k = F_t\,\boldsymbol{u}_t^k + F_b\,\boldsymbol{u}_b^k + F_r\,\boldsymbol{u}_r^k = F_s\,\boldsymbol{u}_s^k\,, \qquad s = t, b, r\,, \quad r = 2, ..., N\,, \tag{2.4}$$

$$F_t = \frac{P_0 + P_1}{2}, \quad F_b = \frac{P_0 - P_1}{2}, \quad F_r = P_r - P_{r-2}. \tag{2.5}$$

in cui $P_j = P_j(\zeta_k)$ è il polinomio di Legendre di grado j definito nel dominio ζ_k: $-1 < \zeta_k < 1$. Al top (t) e al bottom (b) i valori degli spostamenti sono usati come variabili incognite e si possono imporre le seguenti condizioni di compatibilità:

$$u_t^k = u_b^{k+1}, \qquad k = 1, N_l - 1. \tag{2.6}$$

I modelli LW, rispetto a quelli ESL, permettono di modellare nelle strutture multi-strato la distribuzione di spostamenti a zig-zag. E' possibile riprodurre gli effetti zig-zag anche nei modelli ESL utilizzando la teoria di Murakami. In accordo con la [9], un termine zig-zag può essere introdotto nell'equazione (2.2) nel modo seguente:

$$\boldsymbol{u}^k = F_0\,\boldsymbol{u}_0^k + \ldots + F_N\,\boldsymbol{u}_N^k + (-1)^k \zeta_k \boldsymbol{u}_Z^k. \tag{2.7}$$

Il pedice Z si riferisce al termine introdotto. Queste teorie si chiamano zig-zag (ZZ) theories.

2.2 Relazioni geometriche

Si definisce guscio un corpo tridimensionale delimitato da due superfici curve vicine. La superficie media del guscio è il luogo dei punti che giace a metà tra le due superfici. La distanza tra le due superfici misurata lungo la normale alla superficie media è lo spessore del guscio nel punto considerato [10]. I gusci possono essere visti come generalizzazioni delle piastre [11];al contrario, una piastra è un caso speciale di un guscio senza nessuna curvatura. In questa sezione le equazioni fondamentali della teoria del guscio sono

presentate per ottenere le relazioni geometriche anche per i problemi multi-campo. Le relazioni geometriche per le piastre sono viste come un caso particolare dei gusci. Il materiale è assunto essere linearmente elastico ed omogeneo, gli spostamenti sono assunti piccoli, da questo si assume lineare il campo delle equazioni; la deformazione a taglio e gli effetti dell'inerzia rotatoria sono trascurabili.

2.2.1 Geometria doppia curvatura

In accordo con [10], le relazioni geometriche per un guscio con doppia curvatura sono ottenute in questo paragrafo. Considerando un guscio con raggio di curvatura costante (Fig.2.1) e rinominando il sistema di riferimento curvilineo (α, β, z), le relazioni geometriche possono essere riscritte in forma matriciale come in Eq.(2.8):

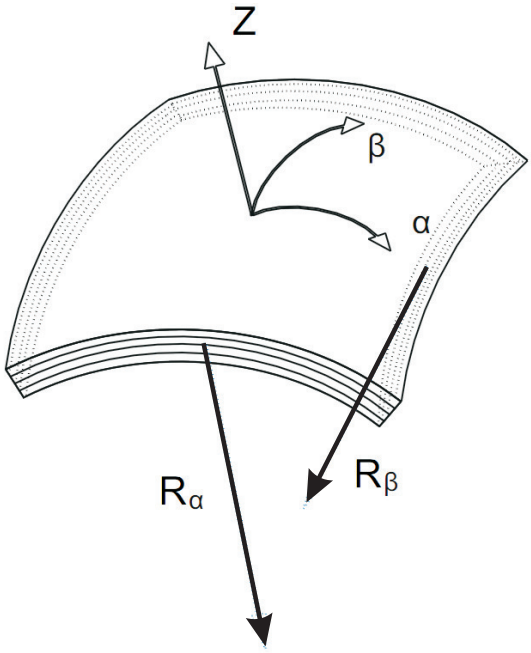

Figura 2.1: Geometria doppia curvatura

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_p =& [\epsilon_{\alpha\alpha}, \epsilon_{\beta\beta}, \epsilon_{\alpha\beta}] = (\boldsymbol{D}_p + \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{u}\,, \\ \boldsymbol{\epsilon}_n =& [\epsilon_{\alpha z}, \epsilon_{\beta z}, \epsilon_{zz}] = (\boldsymbol{D}_{np} + \boldsymbol{D}_{nz} - \boldsymbol{A}_n)\boldsymbol{u}\,, \end{aligned} \tag{2.8}$$

dove gli operatori differenziali sono:

$$\boldsymbol{D}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial_\alpha}{H_\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial_\beta}{H_\beta} & 0 \\ \frac{\partial_\beta}{H_\beta} & \frac{\partial_\alpha}{H_\alpha} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_{np} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial_\alpha}{H_\alpha} \\ 0 & 0 & \frac{\partial_\beta}{H_\beta} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_{nz} = \begin{bmatrix} \partial_z & 0 & 0 \\ 0 & \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{A}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{H_\alpha R_\alpha} \\ 0 & 0 & \frac{1}{H_\beta R_\beta} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \boldsymbol{A}_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{H_\alpha R_\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{H_\beta R_\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{2.10}$$

In questi vettori, i coefficienti della metrica curvilinea sono:

$$H_\alpha = (1 + z/R_\alpha) , \quad H_\beta = (1 + z/R_\beta) , \quad H_z = 1 . \tag{2.11}$$

dove R_α e R_β sono i raggi di curvatura principali lungo le coordinate α e β, rispettivamente. La radice di un segmento lineare infinitesimale nello strato, la relativa area infinitesimale e il volume sono dati da:

$$\begin{aligned} ds^2 = & \quad {H_\alpha}^2 \, d\alpha^2 \; + \; {H_\beta}^2 \, d\beta^2 + {H_z}^2 \, dz^2 \; , \\ d\Omega = & \quad H_\alpha H_\beta \, d\alpha \, d\beta \; , \\ dV = & \quad H_\alpha \, H_\beta \, H_z \, d\alpha \, d\beta \, dz \; . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Le relazioni geometriche (2.8) sono valide per il cilindro quando un raggio di curvatura è infinito.
Nello studio delle strutture multi-strato, queste relazioni sono riferite alla superficie media di ogni strato se il modello usato è un layer-wise, mentre esse sono riferite alla superficie media del laminato globale se il modello è equivalent single layer.

2.2.2 Relazioni geometriche multicampo

In [12], le relazioni geometriche che collegano il campo elettrico $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ con il potenziale elettrico Φ sono:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{E}}_p &= [\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_\beta]^T = -\boldsymbol{D}_{ep} \, \Phi \, , \\ \boldsymbol{\mathcal{E}}_n &= [\mathcal{E}_z]^T = -\boldsymbol{D}_{en} \, \Phi \, , \end{aligned} \tag{2.13}$$

dove il significato dei vettori è:

$$\boldsymbol{D}_{ep} = \begin{bmatrix} \frac{\partial_\alpha}{H_\alpha} \\ \frac{\partial_\beta}{H_\beta} \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{D}_{en} = \begin{bmatrix} \partial_z \end{bmatrix} .$$

2.3 Equazioni costitutive

Le equazioni costitutive caratterizzano il singolo materiale e le sue reazioni ai carichi applicati. In accordo con Reddy [1], la legge di Hooke's generalizzata è considerata per il caso meccanico utilizzando un modello costitutivo lineare per deformazioni infinitesimali. Queste equazioni sono ottenute con le coordinate del materiale e successivamente modificate in un sistema di riferimento generale dipendente dal problema. Le condizioni di tensione piana sono brevemente discusse in modo da evitare il fenomeno del Poisson's locking. Le equazioni costitutive per il caso elettro-meccanico sono ottenute usando l'equazione dell'energia libera di Gibbs.

2.3.1 Equazioni per i materiali compositi

Quando i punti di un materiale hanno comportamento simmetrico rispetto ad un piano di simmetria, esso si dice *monoclino*. In questo caso generale, le equazioni costitutive che collegano le tensioni alle deformazioni sono scritte nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_p &= \boldsymbol{C}_{pp}\boldsymbol{\epsilon}_p + \boldsymbol{C}_{pn}\boldsymbol{\epsilon}_n \,, \\ \boldsymbol{\sigma}_n &= \boldsymbol{C}_{np}\boldsymbol{\epsilon}_p + \boldsymbol{C}_{nn}\boldsymbol{\epsilon}_n \,, \end{aligned} \tag{2.14}$$

with:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}_{pp} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix} , \qquad \boldsymbol{C}_{pn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13} \\ 0 & 0 & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{36} \end{bmatrix} , \\ \boldsymbol{C}_{np} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{36} \end{bmatrix} , \qquad \boldsymbol{C}_{nn} = \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} & 0 \\ C_{45} & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} , \end{aligned} \tag{2.15}$$

dove i parametri indipendenti del materiale C_{ij} sono 13.
Se uno considera un materiale *ortotropo*, ci sono tre piani di simmetria ortogonali tra loro, così il numero di coefficienti elastici indipendenti è ridotto da 13 a 9:

$$C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = 0 \,.$$

Molto spesso, le proprietà dei materiali sono determinate in laboratorio in termini delle costanti ingegneristiche come il modulo di Young, il modulo di taglio e il coefficiente di Poisson. I 9 coefficienti indipendenti del materiale in Eq.(2.15) possono essere espressi da 9 costanti ingegneristiche indipendenti del materiale:

$$E_1,\ E_2,\ E_3,\ G_{23},\ G_{13},\ G_{12},\ \nu_{12},\ \nu_{13},\ \nu_{23} \,,$$

le relazioni tra i coefficienti del materiale e le costanti ingegneristiche sono:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1-\nu_{23}\nu_{23}}{E_2E_3\Delta} \,, \quad C_{12} = \frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_2E_3\Delta} = \frac{\nu_{12}+\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_3\Delta} \,, \\ C_{13} &= \frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} = \frac{\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}}{E_1E_2\Delta} \,, \\ C_{22} &= \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} \,, \quad C_{23} = \frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} = \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13}}{E_1E_3\Delta} \,, \\ C_{22} &= \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} \,, \quad C_{44} = G_{23} \,, \quad C_{55} = G_{31} \,, \quad C_{66} = G_{12} \,, \\ \Delta &= \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_2E_3} \,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Per il coefficiente di Poisson è valida la seguente relazione:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (\text{no somma su } i,j) \,. \tag{2.17}$$

Quando in un materiale non ci sono direzioni principali, sono considerati infiniti piani di simmetria del materiale. Alcuni materiali sono chiamati *isotropi* e il numero di coefficienti elastici indipendenti si riduce da 9 a 2:

$$E_1 = E_2 = E_3 = E \ , \quad G_{23} = G_{13} = G_{12} = G \ , \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu \ .$$

Le relazioni costitutive per un materiale ortotropo sono scritte in termini di componenti di tensione e deformazione riferite al sistema di coordinate principale del materiale (x_1, x_2, x_3). Nei laminati compositi ogni strato ortotropo ha un orientamento differente rispetto al sistema globale del laminato, questo è chiamato il problema delle coordinate di sistema (x, y, z). In Figura 2.2 il sistema delle coordinate del materiale e il problema delle coordinate di sistema sono chiaramente indicati per uno strato di un laminato. L'angolo ϕ tra le coordinate del materiale nel piano x_1, x_2 e le coordinate del problema x, y è considerato antiorario. La terza coordinata coincide $(x_3 = z)$. Le relazioni tra i due sistemi di riferimento sono:

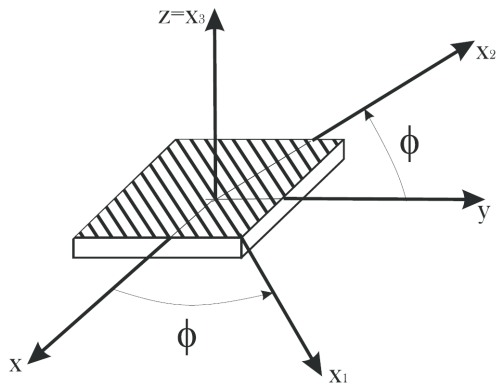

Figura 2.2: Sistema di coordinate del materiale e sistema di coordinate del problema.

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} . \tag{2.18}$$

Applicando questo rotazione al tensore delle tensioni σ_{ij} e riordinandolo in termini di un vettore colonna delle tensioni, si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \sin^2\phi & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\phi \\ \sin^2\phi & \cos^2\phi & 0 & 0 & 0 & \sin 2\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \sin\phi\cos\phi & \sin\phi\cos\phi & 0 & 0 & 0 & \cos^2\phi - \sin^2\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} . \tag{2.19}$$

Le equazioni (2.19) possono essere espresse in forma compatta:

$$\{\sigma\}_p = [T]\{\sigma\}_m \ , \tag{2.20}$$

dove p indica le quantità relative al problema del sistema di riferimento e m al sistema di riferimento del materiale.
La stessa procedura può essere applicata per la trasformazione delle componenti di deformazione, per cui si ha:

$$\{\epsilon\}_m = [T]^T\{\epsilon\}_p \ . \tag{2.21}$$

Le sole quantità rimanenti che necessitano di essere trasformate dal sistema di coordinate del materiale alle coordinate del problema sono i parametri del materiale C_{ij} . Questi possono essere facilmente ottenuti da Eqs.(2.20) e (2.21):

$$\{\sigma\}_p = [T]\{\sigma\}_m = \{\sigma\}_p = [T][C]_m\{\epsilon\}_m = [T][C]_m[T]^T\{\epsilon\}_p = [C]_p\{\epsilon\}_p \, . \tag{2.22}$$

$[C]_p$ è la matrice delle rigidezze del materiale nelle coordinate del problema e può essere riorganizzata in Eqs. (2.15).

Il meccanismo del *thickness locking* (TL), conosciuto anche come il fenomeno del Poisson's locking, è presente nelle analisi delle piastre / gusci [7], [8]. Il TL non permette ad una teoria equivalent single layer con uno spostamento trasversale w costante o lineare lungo lo spessore (che significa deformazione trasversale ϵ_{zz} nulla o costante) di condurre ad una soluzione 3D nei problemi delle piastre / gusci sottili. Una tecnica conosciuta per contrastare il TL consiste nel modificare i coefficienti di rigidezza elastici forzando la condizione 'contraddittoria' della tensione trasversale normale nulla:

$$\sigma_{zz} = 0 \ .$$

Imponendo questa condizione nelle equazione costitutive (2.14), i coefficienti di rigidezza modificati nel sistema di riferimento del materiale (coefficienti di rigidezza ridotti) possono essere ottenuti:

$$\tilde{C}_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \ , \quad \tilde{C}_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \ , \quad \tilde{C}_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \ . \tag{2.23}$$

Per evitare il TL, questi coefficienti devono essere usati in $[C]_m$ al posto di C_{11}, C_{22}, C_{12} e poi ruotati in accordo con Eq.(2.22).

2.3.2 Problemi multicampo

Le equazioni costitutive per i problemi elettro-meccanici possono essere ottenute in accordo con [13] e [14]. L'accoppiamento tra il campo meccanico e il campo elettrico può essere determinato usando i principi della termodinamica e le relazioni di Maxwell [15]. Per questo motivo, è necessario definire l'energia libera di Gibbs [16]. Per maggiori dettagli riguardo ai passaggi matematici, si fa riferimento a [13] e [14]. In questo lavoro, sono stati discussi due casi: problemi puramente meccanici (vedi sezione precedente); problemi elettro-meccanici.

Nel caso di problemi *elettro-meccanici*, due campi fisici interagiscono. In questo caso le equazioni costitutive sono:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_p &= \boldsymbol{C}_{pp}\boldsymbol{\epsilon}_p + \boldsymbol{C}_{pn}\boldsymbol{\epsilon}_n - \boldsymbol{e}_{pp}^T\boldsymbol{\mathcal{E}}_p - \boldsymbol{e}_{pn}^T\boldsymbol{\mathcal{E}}_n \,, \\
\boldsymbol{\sigma}_n &= \boldsymbol{C}_{np}\boldsymbol{\epsilon}_p + \boldsymbol{C}_{nn}\boldsymbol{\epsilon}_n - \boldsymbol{e}_{np}^T\boldsymbol{\mathcal{E}}_p - \boldsymbol{e}_{nn}^T\boldsymbol{\mathcal{E}}_n \,, \\
\boldsymbol{\mathcal{D}}_p &= \boldsymbol{e}_{pp}\boldsymbol{\epsilon}_p + \boldsymbol{e}_{pn}\boldsymbol{\epsilon}_n + \boldsymbol{\varepsilon}_{pp}\boldsymbol{\mathcal{E}}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_{pn}\boldsymbol{\mathcal{E}}_n \,, \\
\boldsymbol{\mathcal{D}}_n &= \boldsymbol{e}_{np}\boldsymbol{\epsilon}_p + \boldsymbol{e}_{nn}\boldsymbol{\epsilon}_n + \boldsymbol{\varepsilon}_{np}\boldsymbol{\mathcal{E}}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_{nn}\boldsymbol{\mathcal{E}}_n \,.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Le matrici introdotte sono:

- Spostamento elettrico:

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_p = \begin{Bmatrix} \mathcal{D}_\alpha \\ \mathcal{D}_\beta \end{Bmatrix} \,, \quad \boldsymbol{\mathcal{D}}_n = \left\{ \mathcal{D}_z \right\} \,. \tag{2.25}$$

- Coefficienti piezoelettrici:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_{pp} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \,, \quad \boldsymbol{e}_{pn} = \begin{bmatrix} e_{15} & e_{14} & 0 \\ e_{25} & e_{24} & 0 \end{bmatrix} \,, \\
\boldsymbol{e}_{np} &= \begin{bmatrix} e_{31} & e_{32} & e_{36} \end{bmatrix} \,, \quad \boldsymbol{e}_{nn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{33} \end{bmatrix} \,.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

- Coefficienti di permittività:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_{pp} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \,, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{pn} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \,, \\
\boldsymbol{\varepsilon}_{np} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \,, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{nn} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \,.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Il significato di queste equazioni costitutive sarà chiarito in seguito, dove saranno discussi il sistema variazionale e le equazioni di governo utilizzate.

2.4 Principio variazionale

Il principio variazionale considerato in questo lavoro è il Principio degli Spostamenti Virtuali o Principle of Virtual Displacements (PVD). Il PVD esteso ai problemi elettro-meccanici è facilmente ottenuto considerando il lavoro interno meccanico ed elettrico e le opportune equazioni costitutive. In questo modo l'uso della Carrera's Unified Formulation (CUF) permette di ottenere molti modelli bidimensionali.

2.4.1 Principle of Virtual Displacements

Il Principle of Virtual Displacements nel caso più generale di un problema termo-elettro-elastico può essere derivato dal principio di Hamilton come indicato in [13] e [14].

Omettendo i passaggi matematici e trascurando i termini che non riguardano questa trattazione, la forma finale del PVD è la seguente:

$$\int_V \left(\delta\boldsymbol{\epsilon}_{pG}^T\boldsymbol{\sigma}_{pC}+\delta\boldsymbol{\epsilon}_{nG}^T\boldsymbol{\sigma}_{nC}-\delta\boldsymbol{\mathcal{E}}_{pG}^T\boldsymbol{\mathcal{D}}_{pC}-\delta\boldsymbol{\mathcal{E}}_{nG}^T\boldsymbol{\mathcal{D}}_{nC}-\delta\boldsymbol{\vartheta}_{pG}^T\boldsymbol{h}_{pC}-\delta\boldsymbol{\vartheta}_{nG}^T\boldsymbol{h}_{nC}\right) dV = \delta L_e-\delta L_{in} \ . \tag{2.28}$$

V è il volume della struttura. I pedici C e G suggeriscono la sostituzione delle relazioni costitutive e geometriche, rispettivamente. T indica la trasposizione di un vettore e δ la variazione virtuale.
δL_e è la variazione virtuale del lavoro compiuto dai carichi esterni, che sono meccanici $\boldsymbol{p}_u$, termici $\boldsymbol{p}_\theta$ e elettrici $\boldsymbol{p}_\Phi$. L'espressione esplicita del lavoro esterno è:

$$\delta L_e = \int_V (\delta\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{p}_u + \delta\theta\,\boldsymbol{p}_\theta + \delta\Phi\,\boldsymbol{p}_\Phi)\, dV \ , \tag{2.29}$$

mentre l'espressione del lavoro inerziale δL_{in} è:

$$\delta L_{in} = \int_V \delta\boldsymbol{u}\,\rho\,\ddot{\boldsymbol{u}}\, dV \ , \tag{2.30}$$

dove ρ è la densità del materiale e i due punti indicano la derivata seconda temporale.

Nel caso dei problemi puramente meccanici, il PVD ha solo lo spostamento u come variabile primaria ed è semplificato tralasciando il lavoro interno termico ed elettrico:

$$\int_V \left(\delta\boldsymbol{\epsilon}_{pG}^T\boldsymbol{\sigma}_{pC} + \delta\boldsymbol{\epsilon}_{nG}^T\boldsymbol{\sigma}_{nC}\right) dV = \delta L_e - \delta L_{in} \ . \tag{2.31}$$

Nel caso di accoppiamento elettro-meccanico, ad esempio con l'uso di materiale piezoelettrici e/o l'applicazione di un carico elettrico, il relativo PVD può essere semplificato tralasciando il lavoro interno termico:

$$\int_V \left(\delta\boldsymbol{\epsilon}_{pG}^T\boldsymbol{\sigma}_{pC} + \delta\boldsymbol{\epsilon}_{nG}^T\boldsymbol{\sigma}_{nC} - \delta\boldsymbol{\mathcal{E}}_{pG}^T\boldsymbol{\mathcal{D}}_{pC} - \delta\boldsymbol{\mathcal{E}}_{nG}^T\boldsymbol{\mathcal{D}}_{nC}\right) dV = \delta L_e - \delta L_{in} \ . \tag{2.32}$$

Per maggiori dettagli si può far riferimento a [13].

2.5 Acronimi dei modelli CUF

Nella *Unified Formulation* sono contenuti molti modelli bidimensionali raffinati ed avanzati. In funzione della descrizione delle variabili (LW, ESL o ZZ), dell'ordine di espansione lungo la direzione dello spessore e del principio variazionale utilizzato, possono essere ottenute un gran numero di teorie *shell*. Per indicare questi modelli viene dato un sistema di acronimi. La prima lettera indica l'approccio al multistrato che può essere *Equivalent Single Layer* (E) o *Layer Wise* (L). La seconda lettera si riferisce al principio variazionale utilizzato: (D) per il *Principle of Virtual Displacements*. In terza posizione un numero indica l'ordine di espansione (N) (da 1 a 4). Nel caso dell'approccio ESL, una lettera

(Z) può essere aggiunta se gli effetti zig-zag degli spostamenti sono stati considerati ciò implica l'uso delle funzioni a zig-zag di Murakami. Riassumendo, ED1-ED4 sono modelli ESL basati sul PVD. Se vengono impiegate le funzioni a zig-zag di Murakami, questi modelli sono indicati come EDZ1-EDZ3. Teorie classiche come la Classical Lamination Theory (CLT) e la First order Shear Deformation Theory (FSDT), possono essere ottenute come un caso particolare della teoria ED1 semplicemente imponendo un valore costante dello spostamento trasversale lungo la direzione dello spessore. Un appropriato utilizzo della *penalty technique* applicata al modulo di taglio del materiale conduce alla CLT. Nel caso dell'approccio *layer wise*, la lettera L è considerata al posto della E, così gli acronimi sono LD1-LD4.

Capitolo 3

Equazioni di governo in forma debole

3.1 Preliminari

La ricerca di soluzioni di generici problemi scientifici o tecnici richiede in generale l'uso di modelli numerici che possono essere discreti o continui. I problemi discreti richiedono un numero finito di componenti con un numero limitato di gradi di libertà (DOFs). Generalmente, solo un numero esiguo di problemi continui semplificati può essere risolta attraverso manipolazioni matematiche. Le soluzioni corrispondenti sono chiamate soluzioni esatte. Quando le soluzioni analitiche non sono calcolabili, comunemente viene introdotta una discretizzazione e il problema è espresso in termini di un numero limitato di variabili discrete utilizzando un numero finito di DOFs. Perciò, la soluzione di un problema continuo viene approssimata risolvendo un problema discreto. L'errore dovuto alla discretizzazione può essere ridotto aumentando il numero delle variabili discrete. Le soluzioni esatte e, più in generale, gli studi di convergenza permettono di verificare l'accuratezza della soluzione approssimata.
Differenti tecniche possono essere applicate per discretizzare i problemi continui. Tra queste, le approssimazioni alle differenze finite (Allen 1955; Southwell 1946), e le procedure dei residui pesati (Crandall 1958; Finlayson 1972), sono state proposte da matematici per trovare i punti stazionari di funzionali appropriati. In alternativa, gli ingegneri hanno introdotto l'analogia tra i sotto-domini continui e gli elementi discreti (Argyris 1960; Hrenikoff 1941; McHenry 1943; Newmark 1949). Il termine "finite element" (FE) o elemento finito è stato usato per prima da Clough (1960) in accordo con l'ultimo approccio. Dagli anni sessanta, sono stati fatti enormi progressi. Le procedure di discretizzazione dei problemi continui sono state standardizzate e generalizzate. Un eccellente riferimento per questo argomento è dato dal lavoro di Zienkiewicz and Taylor (1967), dove una trattazione unificata di "standard discrete problems" (problemi discreti convenzionali) è presentata definendo il processo degli elementi finiti come un metodo di approssimazione dei problemi continui in modo che:

- il continuo è diviso in un numero finito di parti (elementi), il cui comportamento è specificato da un numero finito di parametri;
- la soluzione del sistema completo, costituito dall'assemblaggio dei suoi elementi, segue precisamente le stesse regole applicabili ai problemi discreti convenzionali.

La tecnica di approssimazione suddetta è comunemente conosciuta come il metodo agli elementi finiti (FEM).

3.2 PVD(u) per il caso puramente meccanico

Per i problemi con carichi puramente meccanici il Principle of Virtual Displacement (PVD), come nella (2.31), è:

$$\int_V \left(\delta\boldsymbol{\epsilon}_{pG}{}^T\boldsymbol{\sigma}_{pC} + \delta\boldsymbol{\epsilon}_{nG}{}^T\boldsymbol{\sigma}_{nC}\right) dV = \delta L_e \tag{3.1}$$

Considerando un laminato con N_l lamine, e l'integrale sul volume V_k per ogni lamina k-esima come un integrale sul dominio nel piano Ω_k più un integrale lungo lo spessore nel dominio A_k, è possibile scrivere :

$$\sum_{k=1}^{N_l} \int_{\Omega_k}\int_{A_k} \left\{\delta\boldsymbol{\epsilon}_{pG}^k{}^T\boldsymbol{\sigma}_{pC}^k + \delta\boldsymbol{\epsilon}_{nG}^k{}^T\boldsymbol{\sigma}_{nC}^k\right\} d\Omega_k dz = \sum_{k=1}^{N_l} \delta L_e^k \tag{3.2}$$

dove δL_e^k è il lavoro esterno virtuale sulla lamina k-esima.

Le relative equazioni costitutive sono:

$$\boldsymbol{\sigma}_{pC}^k = \boldsymbol{Q}_{pp}^k\boldsymbol{\epsilon}_{pG}^k + \boldsymbol{Q}_{pn}^k\boldsymbol{\epsilon}_{nG}^k \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{nC}^k = \boldsymbol{Q}_{np}^k\boldsymbol{\epsilon}_{pG}^k + \boldsymbol{Q}_{nn}^k\boldsymbol{\epsilon}_{nG}^k \tag{3.4}$$

Sostituendo queste equazioni e quelle delle relazioni geometriche, nel principio variazionale dell'equazione (3.2) si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_k}\int_{A_k} \left\{\left[(D_p + A_p)\left\{\delta u^k\right\}\right]^T \times \left[Q_{pp}^k (D_p + A_p)\left\{u^k\right\} + Q_{pn}^k (D_{n\Omega} + D_{nz} - A_n)\left\{u^k\right\}\right] + \right.\\
&\left. + \left[(D_{n\Omega} + D_{nz} - A_n)\left\{\delta u^k\right\}\right]^T \times \left[Q_{np}^k (D_p + A_p)\left\{u^k\right\} + Q_{nn}^k (D_{n\Omega} + D_{nz} - A_n)\left\{u^k\right\}\right]\right\} \times \\
&\times H_\alpha H_\beta \, d\Omega_k dz = \delta L_e^k
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Si applica una approssimazione 2D, in accordo con la teoria CUF, che permette di esprimere le variabili incognite tramite le cosiddette *thickness function*:

$$\boldsymbol{u}\,(\alpha,\beta,z) \;=\; F_\tau(z)\,\boldsymbol{u}_\tau(\alpha,\beta) \qquad\qquad \delta\boldsymbol{u}\,(\alpha,\beta,z) \;=\; F_s(z)\,\delta\boldsymbol{u}_s(\alpha,\beta)$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_k}\int_{A_k}\Bigg\{\Big[(D_p+A_p)\left\{F_s\,\delta u_s^k\right\}\Big]^T\times\Big[Q_{pp}^k\,(D_p+A_p)\left\{F_\tau\,u_\tau^k\right\}+Q_{pn}^k\,(D_{n\Omega}+D_{nz}-A_n)\left\{F_\tau\,u_\tau^k\right\}\Big]+\\
&+\Big[(D_{n\Omega}+D_{nz}-A_n)\left\{F_s\,\delta u_s^k\right\}\Big]^T\times\Big[Q_{np}^k\,(D_p+A_p)\left\{F_\tau\,u_\tau^k\right\}+Q_{nn}^k\,(D_{n\Omega}+D_{nz}-A_n)\left\{F_\tau\,u_\tau^k\right\}\Big]\Bigg\}\times\\
&\times H_\alpha H_\beta\,d\Omega_k dz=\delta L_e^k
\end{aligned} \tag{3.6}$$

In accordo con l'approssimazione agli elementi finiti si introducono le funzioni di forma che permettono di esprimere le variabili incognite in funzione dei valori nodali:

$$\boldsymbol{u}\,(\alpha,\beta,z) \;=\; F_\tau(z)\,N_i(\xi,\eta)\,\boldsymbol{q}_{\tau i} \qquad\qquad \delta\boldsymbol{u}\,(\alpha,\beta,z) \;=\; F_s(z)\,N_j(\xi,\eta)\,\delta\boldsymbol{q}_{sj}$$

Sostituendo le espressioni suddette nel principio variazionale (3.6), per un laminato multistrato si ottiene un sistema di equazioni di equilibrio che può essere scritto in forma compatta con la seguente espressione:

$$\delta\boldsymbol{q}_{sj}^k\;:\;\boldsymbol{K}^{k\tau sij}\,\boldsymbol{q}_{\tau i}^k\;=\;\boldsymbol{F}_{sj}^k \tag{3.7}$$

dove $\boldsymbol{F}$ rappresenta il vettore dei carichi nodali mentre $\boldsymbol{q}$ esprimono le condizioni al contorno. Nell'equazione $\boldsymbol{\tau}\,e\,\boldsymbol{s}$ variano tra 0 e N (ordine di espansione), $\boldsymbol{i}\;e\;\boldsymbol{j}$ variano tra $1\,e\,N_n$ (numero di nodi), $\boldsymbol{k}$ è il numero di strati del laminato.

La matrice $\boldsymbol{K}^{k\tau sij}$ è il nucleo di rigidezza fondamentale dell'elemento finito e può essere calcolata attraverso una integrazione numerica delle funzioni di forma nel piano e lungo lo spessore. Per il caso puramente meccanico la matrice $\boldsymbol{K}^{k\tau sij}$ ha dimensione (3×3) perchè nel PVD(u) ci sono 3 variabili (le componenti di spostamento):

$$\boldsymbol{K}^{k\tau sij}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} & \boldsymbol{K}_{13}\\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22} & \boldsymbol{K}_{23}\\ \boldsymbol{K}_{31} & \boldsymbol{K}_{32} & \boldsymbol{K}_{33}\end{bmatrix}^{k\tau sij} \tag{3.8}$$

Per una scrittura più compatta dei nuclei, vengono definiti i seguenti integrali nel piano

Ω^k:

$$\left(Y^{kij}, Y^{ki_\alpha j}, Y^{kij_\alpha}, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\right) = \int_{\Omega_k} \left(N_i N_j, \frac{\partial N_i}{\partial \alpha} N_j, N_i \frac{\partial N_j}{\partial \alpha}, \frac{\partial N_i}{\partial \alpha}\frac{\partial N_j}{\partial \alpha}\right) dz \tag{3.9}$$

$$\left(Y^{kij}, Y^{ki_\beta j}, Y^{kij_\beta}, Y^{ki_\beta j_\beta}\right) = \int_{\Omega_k} \left(N_i N_j, \frac{\partial N_i}{\partial \beta} N_j, N_i \frac{\partial N_j}{\partial \beta}, \frac{\partial N_i}{\partial \beta}\frac{\partial N_j}{\partial \beta}\right) dz \tag{3.10}$$

$$\left(Y^{ki_\alpha j_\beta}, Y^{ki_\beta j_\alpha}\right) = \int_{\Omega_k} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \alpha}\frac{\partial N_j}{\partial \beta}, \frac{\partial N_i}{\partial \beta}\frac{\partial N_j}{\partial \alpha}\right) dz \tag{3.11}$$

Vengono definiti i seguenti integrali sul dominio dello spessore A^k:

$$\left(J^{k\tau s}, J^{k\tau s}_\alpha, J^{k\tau s}_\beta, J^{k\tau s}_{\frac{\alpha}{\beta}}, J^{k\tau s}_{\frac{\beta}{\alpha}}, J^{k\tau s}_{\alpha\beta}\right) = \int_{A_k} F_\tau F_s \left(1, H^k_\alpha, H^k_\beta, \frac{H^k_\alpha}{H^k_\beta}, \frac{H^k_\beta}{H^k_\alpha}, H^k_\alpha H^k_\beta\right) dz \tag{3.12}$$

$$\left(J^{k\tau_z s}, J^{k\tau_z s}_\alpha, J^{k\tau_z s}_\beta, J^{k\tau_z s}_{\frac{\alpha}{\beta}}, J^{k\tau_z s}_{\frac{\beta}{\alpha}}, J^{k\tau_z s}_{\alpha\beta}\right) = \int_{A_k} \frac{\partial F_\tau}{\partial z} F_s \left(1, H^k_\alpha, H^k_\beta, \frac{H^k_\alpha}{H^k_\beta}, \frac{H^k_\beta}{H^k_\alpha}, H^k_\alpha H^k_\beta\right) dz \tag{3.13}$$

$$\left(J^{k\tau s_z}, J^{k\tau s_z}_\alpha, J^{k\tau s_z}_\beta, J^{k\tau s_z}_{\frac{\alpha}{\beta}}, J^{k\tau s_z}_{\frac{\beta}{\alpha}}, J^{k\tau s_z}_{\alpha\beta}\right) = \int_{A_k} F_\tau \frac{\partial F_s}{\partial z} \left(1, H^k_\alpha, H^k_\beta, \frac{H^k_\alpha}{H^k_\beta}, \frac{H^k_\beta}{H^k_\alpha}, H^k_\alpha H^k_\beta\right) dz \tag{3.14}$$

$$\left(J^{k\tau_z s_z}, J_{\alpha}^{k\tau_z s_z}, J_{\beta}^{k\tau_z s_z}, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau_z s_z}, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau_z s_z}, J_{\alpha\beta}^{k\tau_z s_z}\right) = \int_{A_k} \frac{\partial F_\tau}{\partial z}\frac{\partial F_s}{\partial z}\left(1, H_\alpha^k, H_\beta^k, \frac{H_\alpha^k}{H_\beta^k}, \frac{H_\beta^k}{H_\alpha^k}, H_\alpha^k H_\beta^k\right) dz \tag{3.15}$$

3.2.1 Nuclei per le strutture a guscio con carico puramente meccanico

Il nucleo fondamentale $K_{uu}^{k\tau s}$ di dimensioni (3×3) è :

$$\begin{aligned} K_{uu_{11}}^{k\tau s} &= Q_{55}^k\, Y^{kij}\, J_{\alpha\beta}^{k\tau_z s_z} - \frac{Q_{55}^k}{R_\alpha^k}\, Y^{kij}\, J_\beta^{k\tau_z s} - \frac{Q_{55}^k}{R_\alpha^k}\, Y^{kij}\, J_\beta^{k\tau s_z} + Q_{66}^k\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + Q_{16}^k\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} + \\ &+ Q_{16}^k\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + Q_{11}^k\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} + \frac{Q_{55}^k}{(R_\alpha^k)^2}\, Y^{kij}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} K_{uu_{12}}^{k\tau s} &= Q_{45}^k\, Y^{kij}\, J_{\alpha\beta}^{k\tau_z s_z} - \frac{Q_{45}^k}{R_\beta^k}\, Y^{kij}\, J_\alpha^{k\tau_z s} - \frac{Q_{45}^k}{R_\alpha^k}\, Y^{kij}\, J_\beta^{k\tau s_z} + Q_{26}^k\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + Q_{12}^k\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} + \\ &+ Q_{66}^k\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + Q_{16}^k\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} + \frac{Q_{45}^k}{R_\alpha^k R_\beta^k}\, Y^{kij}\, J^{k\tau s} \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} K_{uu_{13}}^{k\tau s} &= Q_{45}^k\, Y^{kij_\beta}\, J_\alpha^{k\tau_z s} + Q_{55}^k\, Y^{kij_\alpha}\, J_\beta^{k\tau_z s} + Q_{36}^k\, Y^{ki_\beta j}\, J_\alpha^{k\tau s_z} + Q_{13}^k\, Y^{ki_\alpha j}\, J_\beta^{k\tau s_z} - \frac{Q_{45}^k}{R_\alpha^k}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau s} - \\ &- \frac{Q_{55}^k}{R_\alpha^k}\, Y^{kij_\alpha}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} + \frac{Q_{26}^k}{R_\beta^k}\, Y^{ki_\beta j}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + \frac{Q_{16}^k}{R_\alpha^k}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{12}^k}{R_\beta^k}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{11}^k}{R_\alpha^k}\, Y^{ki_\alpha j}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$K_{uu_{21}}^{k\tau s} = Q_{45}^{k}\, Y^{kij}\, J_{\alpha\beta}^{k\tau_z s_z} - \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{kij}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} - \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + Q_{26}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + Q_{66}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} +$$
$$+ Q_{12}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + Q_{16}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} + \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\alpha}^{k}\, R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij}\, J^{k\tau s} \tag{3.19}$$

$$K_{uu_{22}}^{k\tau s} = Q_{44}^{k}\, Y^{kij}\, J_{\alpha\beta}^{k\tau_z s_z} - \frac{Q_{44}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij} J_{\alpha}^{k\tau_z s} - \frac{Q_{44}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij} J_{\alpha}^{k\tau s_z} + Q_{22}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + Q_{26}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} +$$
$$+ Q_{26}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + Q_{66}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} + \frac{Q_{44}^{k}}{\left(R_{\beta}^{k}\right)^2}\, Y^{kij}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} \tag{3.20}$$

$$K_{uu_{23}}^{k\tau s} = Q_{44}^{k}\, Y^{kij_\beta}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} + Q_{45}^{k}\, Y^{kij_\alpha}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} + Q_{23}^{k}\, Y^{ki_\beta j}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + Q_{36}^{k}\, Y^{ki_\alpha j}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} - \frac{Q_{44}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij_\beta}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} -$$
$$- \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{22}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{ki_\beta j}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + \frac{Q_{12}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{26}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{16}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{ki_\alpha j}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} \tag{3.21}$$

$$K_{uu_{31}}^{k\tau s} = Q_{36}^{k}\, Y^{kij_\beta}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} + Q_{13}^{k}\, Y^{kij_\alpha}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} + Q_{45}^{k}\, Y^{ki_\beta j}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + Q_{55}^{k}\, Y^{ki_\alpha j}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} + \frac{Q_{26}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij_\beta}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} +$$
$$+ \frac{Q_{16}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{12}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{11}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{kij_\alpha}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} - \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s} - \frac{Q_{55}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{ki_\alpha j}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} \tag{3.22}$$

$$K_{uu_{32}}^{k\tau s} = Q_{23}^{k}\, Y^{kij_\beta}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} + Q_{36}^{k}\, Y^{kij_\alpha}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} + Q_{44}^{k}\, Y^{ki_\beta j}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + Q_{45}^{k}\, Y^{ki_\alpha j}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} + \frac{Q_{22}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij_\beta}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} +$$
$$+ \frac{Q_{12}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{26}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{16}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{kij_\alpha}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} - \frac{Q_{44}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{ki_\beta j}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} - \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s} \tag{3.23}$$

$$
\begin{aligned}
K_{uu_{33}}^{k\tau s} &= Q_{33}^{k}\, Y^{kij}\, J_{\alpha\beta}^{k\tau_z s_z} + \frac{Q_{23}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} + \frac{Q_{13}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{kij}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} + \frac{Q_{23}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + \frac{Q_{13}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{kij}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} + \\
&+ Q_{44}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + Q_{45}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q_{45}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + Q_{55}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} + \frac{2\, Q_{12}^{k}}{R_{\alpha}^{k}\, R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij}\, J^{k\tau s} + \\
&+ \frac{Q_{22}^{k}}{\left(R_{\beta}^{k}\right)^{2}}\, Y^{kij}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + \frac{Q_{11}^{k}}{\left(R_{\alpha}^{k}\right)^{2}}\, Y^{kij}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s}
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

3.2.2 Nuclei per le strutture piastra con carico puramente meccanico

Ponendo R_α e R_β infiniti, si ottengono i nuclei validi per il caso piastra.
Il nucleo fondamentale $K_{uu}^{k\tau s}$ di dimensioni (3×3) è :

$$K_{uu_{11}}^{k\tau s} = Q_{55}^{k}\, Y^{kij}\, J^{k\tau_z s_z} + Q_{66}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q_{16}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q_{16}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + Q_{11}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J^{k\tau s}$$

$$K_{uu_{12}}^{k\tau s} = Q_{45}^{k}\, Y^{kij}\, J^{k\tau_z s_z} + Q_{26}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q_{12}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q_{66}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + Q_{16}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J^{k\tau s}$$

$$K_{uu_{13}}^{k\tau s} = Q_{45}^{k}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau_z s} + Q_{55}^{k}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau_z s} + Q_{36}^{k}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s_z} + Q_{13}^{k}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s_z}$$

$$K_{uu_{21}}^{k\tau s} = Q_{45}^{k}\, Y^{kij}\, J^{k\tau_z s_z} + Q_{26}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q_{66}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q_{12}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + Q_{16}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J^{k\tau s}$$

$$K_{uu_{22}}^{k\tau s} = Q_{44}^{k}\, Y^{kij}\, J^{k\tau_z s_z} + Q_{22}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q_{26}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q_{26}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + Q_{66}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J^{k\tau s}$$

$$K_{uu_{23}}^{k\tau s} = Q_{44}^{k}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau_z s} + Q_{45}^{k}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau_z s} + Q_{23}^{k}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s_z} + Q_{36}^{k}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s_z}$$

$$K_{uu_{31}}^{k\tau s} = Q_{36}^{k}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau_z s} + Q_{13}^{k}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau_z s} + Q_{45}^{k}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s_z} + Q_{55}^{k}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s_z}$$

$$K_{uu_{32}}^{k\tau s} = Q_{23}^{k}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau_z s} + Q_{36}^{k}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau_z s} + Q_{44}^{k}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s_z} + Q_{45}^{k}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s_z}$$

$$K_{uu_{33}}^{k\tau s} = Q_{33}^{k}\, Y^{kij}\, J^{k\tau_z s_z} + Q_{44}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q_{45}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q_{45}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + Q_{55}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J^{k\tau s}$$

3.3 PVD(u,Φ) per il caso elettromeccanico

Per i problemi con carichi elettromeccanici il Principle of Virtual Displacement (PVD), come nella (2.32), è:

$$\int_V \left(\delta\boldsymbol{\epsilon}_{pG}{}^T\boldsymbol{\sigma}_{pC} + \delta\boldsymbol{\epsilon}_{nG}{}^T\boldsymbol{\sigma}_{nC} - \delta\boldsymbol{\mathcal{E}}_{pG}{}^T\boldsymbol{\mathcal{D}}_{pC} - \delta\boldsymbol{\mathcal{E}}_{nG}{}^T\boldsymbol{\mathcal{D}}_{nC}\right) dV = \delta L_e \tag{3.25}$$

Considerando un laminato con N_l lamine, e l'integrale sul volume V_k per ogni lamina k-esima come un integrale sul dominio nel piano Ω_k più un integrale lungo lo spessore nel dominio A_k, è possibile scrivere :

$$\sum_{k=1}^{N_l} \int_{\Omega_k}\int_{A_k} \left\{\delta\boldsymbol{\epsilon}_{pG}^k{}^T\boldsymbol{\sigma}_{pC}^k + \delta\boldsymbol{\epsilon}_{nG}^k{}^T\boldsymbol{\sigma}_{nC}^k - \delta\boldsymbol{\mathcal{E}}_{pG}^k{}^T\boldsymbol{\mathcal{D}}_{pC}^k - \delta\boldsymbol{\mathcal{E}}_{nG}^k{}^T\boldsymbol{\mathcal{D}}_{nC}^k\right\} d\Omega_k dz = \sum_{k=1}^{N_l} \delta L_e^k \tag{3.26}$$

dove δL_e^k è il lavoro esterno virtuale sulla lamina k-esima.

Le relative equazioni costitutive sono:

$$\boldsymbol{\sigma}_{pC}^k = \boldsymbol{Q}_{pp}^k\boldsymbol{\epsilon}_{pG}^k + \boldsymbol{Q}_{pn}^k\boldsymbol{\epsilon}_{nG}^k - \boldsymbol{e}_{pp}^{k^T}\boldsymbol{\mathcal{E}}_{pG}^k - \boldsymbol{e}_{np}^{k^T}\boldsymbol{\mathcal{E}}_{nG}^k \tag{3.27}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{nC}^k = \boldsymbol{Q}_{np}^k\boldsymbol{\epsilon}_{pG}^k + \boldsymbol{Q}_{nn}^k\boldsymbol{\epsilon}_{nG}^k - \boldsymbol{e}_{pn}^{k^T}\boldsymbol{\mathcal{E}}_{pG}^k - \boldsymbol{e}_{nn}^{k^T}\boldsymbol{\mathcal{E}}_{nG}^k \tag{3.28}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{pC}^k = \boldsymbol{e}_{pp}^k\boldsymbol{\epsilon}_{pG}^k + \boldsymbol{e}_{pn}^k\boldsymbol{\epsilon}_{nG}^k + \boldsymbol{\varepsilon}_{pp}^k\boldsymbol{\mathcal{E}}_{pG}^k + \boldsymbol{\varepsilon}_{pn}^k\boldsymbol{\mathcal{E}}_{nG}^k \tag{3.29}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{nC}^k = \boldsymbol{e}_{np}^k\boldsymbol{\epsilon}_{pG}^k + \boldsymbol{e}_{nn}^k\boldsymbol{\epsilon}_{nG}^k + \boldsymbol{\varepsilon}_{np}^k\boldsymbol{\mathcal{E}}_{pG}^k + \boldsymbol{\varepsilon}_{nn}^k\boldsymbol{\mathcal{E}}_{nG}^k \tag{3.30}$$

Sostituendo queste equazioni e quelle delle relazioni geometriche, nel principio variazionale dell'equazione (3.26) si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_k}\int_{A_k} \Bigg\{ \Big[(D_p + A_p) \left\{ \delta u^k \right\} \Big]^T \times \Big[Q^k_{pp} (D_p + A_p) \left\{ u^k \right\} + Q^k_{pn} (D_{n\Omega} + D_{nz} - A_n) \left\{ u^k \right\} + \\
&+ e^{k^T}_{pp} D_{\Phi p} \left\{ \Phi^k \right\} + e^{k^T}_{np} D_{\Phi n} \left\{ \Phi^k \right\} \Big] + \Big[(D_{n\Omega} + D_{nz} - A_n) \left\{ \delta u^k \right\} \Big]^T \times \Big[Q^k_{np} (D_p + A_p) \left\{ u^k \right\} + \\
&+ Q^k_{nn} (D_{n\Omega} + D_{nz} - A_n) \left\{ u^k \right\} + e^{k^T}_{pn} D_{\Phi p} \left\{ \Phi^k \right\} + e^{k^T}_{nn} D_{\Phi n} \left\{ \Phi^k \right\} \Big] + \Big[D_{\Phi n} \left\{ \delta \Phi^k \right\} \Big]^T \times \\
&\times \Big[e^k_{np} (D_p + A_p) \left\{ u^k \right\} + e^k_{nn} (D_{n\Omega} + D_{nz} - A_n) \left\{ u^k \right\} - \varepsilon^k_{np} D_{\Phi p} \left\{ \Phi^k \right\} - \varepsilon^k_{nn} D_{\Phi n} \left\{ \Phi^k \right\} \Big] + \\
&+ \Big[D_{\Phi p} \left\{ \delta \Phi^k \right\} \Big]^T \times \Big[e^k_{pp} (D_p + A_p) \left\{ u^k \right\} + e^k_{pn} (D_{n\Omega} + D_{nz} - A_n) \left\{ u^k \right\} - \varepsilon^k_{pp} D_{\Phi p} \left\{ \Phi^k \right\} - \\
&- \varepsilon^k_{pn} D_{\Phi n} \left\{ \Phi^k \right\} \Big] \Bigg\} H_\alpha H_\beta \, d\Omega_k dz = \delta L^k_e
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Si applica una approssimazione 2D, in accordo con la teoria CUF, che permette di esprimere le variabili incognite tramite le cosiddette *thickness function*:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(\alpha, \beta, z) &= F_\tau(z) \, \boldsymbol{u}_\tau(\alpha, \beta) & \delta \boldsymbol{u}(\alpha, \beta, z) &= F_s(z) \, \delta \boldsymbol{u}_s(\alpha, \beta) \\
\Phi(\alpha, \beta, z) &= F_\tau(z) \, \Phi_\tau(\alpha, \beta) & \delta \Phi(\alpha, \beta, z) &= F_s(z) \, \delta \Phi_s(\alpha, \beta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_k}\int_{A_k} \Bigg\{ \Big[(D_p + A_p) \left\{ F_s \, \delta u^k_s \right\} \Big]^T \times \Big[Q^k_{pp} (D_p + A_p) \left\{ F_\tau \, u^k_\tau \right\} + Q^k_{pn} (D_{n\Omega} + D_{nz} - A_n) \left\{ F_\tau \, u^k_\tau \right\} + \\
&+ e^{k^T}_{pp} D_{\Phi p} \left\{ F_\tau \, \Phi^k_\tau \right\} + e^{k^T}_{np} D_{\Phi n} \left\{ F_\tau \, \Phi^k_\tau \right\} \Big] + \Big[(D_{n\Omega} + D_{nz} - A_n) \left\{ F_s \, \delta u^k_s \right\} \Big]^T \times \Big[Q^k_{np} (D_p + A_p) \left\{ F_\tau \, u^k_\tau \right\} + \\
&+ Q^k_{nn} (D_{n\Omega} + D_{nz} - A_n) \left\{ F_\tau \, u^k_\tau \right\} + e^{k^T}_{pn} D_{\Phi p} \left\{ F_\tau \, \Phi^k_\tau \right\} + e^{k^T}_{nn} D_{\Phi n} \left\{ F_\tau \, \Phi^k_\tau \right\} \Big] + \Big[D_{\Phi n} \left\{ F_s \, \delta \Phi^k_s \right\} \Big]^T \times \\
&\times \Big[e^k_{np} (D_p + A_p) \left\{ F_\tau \, u^k_\tau \right\} + e^k_{nn} (D_{n\Omega} + D_{nz} - A_n) \left\{ F_\tau \, u^k_\tau \right\} - \varepsilon^k_{np} D_{\Phi p} \left\{ F_\tau \, \Phi^k_\tau \right\} - \varepsilon^k_{nn} D_{\Phi n} \left\{ F_\tau \, \Phi^k_\tau \right\} \Big] + \\
&+ \Big[D_{\Phi p} \left\{ F_s \, \delta \Phi^k_s \right\} \Big]^T \times \Big[e^k_{pp} (D_p + A_p) \left\{ F_\tau \, u^k_\tau \right\} + e^k_{pn} (D_{n\Omega} + D_{nz} - A_n) \left\{ F_\tau \, u^k_\tau \right\} - \varepsilon^k_{pp} D_{\Phi p} \left\{ F_\tau \, \Phi^k_\tau \right\} - \\
&- \varepsilon^k_{pn} D_{\Phi n} \left\{ F_\tau \, \Phi^k_\tau \right\} \Big] \Bigg\} H_\alpha H_\beta \, d\Omega_k dz = \delta L^k_e
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

In accordo con l'approssimazione agli elementi finiti si introducono le funzioni di forma che permettono di esprimere le variabili incognite in funzione dei valori nodali:

$$\boldsymbol{u}\,(\alpha,\beta,z) \;=\; F_\tau(z)\,N_i(\xi,\eta)\,\boldsymbol{q}_{u\,\tau i} \qquad\qquad \delta\boldsymbol{u}\,(\alpha,\beta,z) \;=\; F_s(z)\,N_j(\xi,\eta)\,\delta\boldsymbol{q}_{u\,sj}$$

$$\Phi\,(\alpha,\beta,z) \;=\; F_\tau(z)\,N_i(\xi,\eta)\,\boldsymbol{q}_{\phi\,\tau i} \qquad\qquad \delta\Phi\,(\alpha,\beta,z) \;=\; F_s(z)\,N_j(\xi,\eta)\,\delta\boldsymbol{q}_{\phi\,sj}$$

Sostituendo le espressioni suddette nel principio variazionale (3.32), per un laminato multistrato si ottiene un sistema di equazioni di equilibrio che può essere scritto in forma compatta con la seguente espressione:

$$\delta\boldsymbol{q}^k_{sj} \;:\; \boldsymbol{K}^{k\tau sij}\,\boldsymbol{q}^k_{\tau i} \;=\; \boldsymbol{F}^k_{sj} \tag{3.33}$$

dove $\boldsymbol{F}$ rappresenta il vettore dei carichi nodali mentre $\boldsymbol{q}$ esprimono le condizioni al contorno. Nell'equazione $\boldsymbol{\tau}\,e\,\boldsymbol{s}$ variano tra 0 e N (ordine di espansione), $\boldsymbol{i}\;e\;\boldsymbol{j}$ variano tra $1\,e\,N_n$ (numero di nodi), $\boldsymbol{k}$ è il numero di strati del laminato.

La matrice $\boldsymbol{K}^{k\tau sij}$ è il nucleo di rigidezza fondamentale dell'elemento finito e può essere calcolata attraverso una integrazione numerica delle funzioni di forma nel piano e lungo lo spessore. Per il caso elettromeccanico la matrice $\boldsymbol{K}^{k\tau sij}$ ha dimensione (4×4) perchè nel PVD(u,Φ) ci sono 4 variabili (le 3 componenti di spostamento e il potenziale elettrico scalare):

$$\boldsymbol{K}^{k\tau sij} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} & \boldsymbol{K}_{13} & \boldsymbol{K}_{14} \\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22} & \boldsymbol{K}_{23} & \boldsymbol{K}_{24} \\ \boldsymbol{K}_{31} & \boldsymbol{K}_{32} & \boldsymbol{K}_{33} & \boldsymbol{K}_{34} \\ \boldsymbol{K}_{41} & \boldsymbol{K}_{42} & \boldsymbol{K}_{43} & \boldsymbol{K}_{44} \end{bmatrix}^{k\tau sij} \tag{3.34}$$

Separando i gradi di libertà meccanici $q^k_u = (q^k_{u_0}, q^k_{v_0}, q^k_{w_0})^T$ da quelli elettrici $q^k_\Phi = (q^k_{\Phi_0})^T$, è possibile riordinare la matrice di rigidezza (3.34) in una forma più concisa dove la parte puramente meccanica, la parte puramente elettrica e le componenti di accoppiamento sono poste in evidenza:

$$\boldsymbol{K}^{k\tau sij} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{uu} & \boldsymbol{K}_{u\Phi} \\ \boldsymbol{K}_{\Phi u} & \boldsymbol{K}_{\Phi\Phi} \end{bmatrix}^{k\tau sij} \tag{3.35}$$

Dove la parte meccanica $\boldsymbol{K}_{uu}$ ha dimensione (3×3), le parti di accoppiamento $\boldsymbol{K}_{u\Phi}$ e $\boldsymbol{K}_{\Phi u}$ hanno dimensione (3×1) e viceversa, la parte elettrica $\boldsymbol{K}_{\Phi\Phi}$ ha dimensione (1×1),

Per una scrittura più compatta dei nuclei, vengono definiti i seguenti integrali nel piano Ω^k:

$$\left(Y^{kij}, Y^{ki_\alpha j}, Y^{kij_\alpha}, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\right) = \int_{\Omega_k} \left(N_i N_j, \frac{\partial N_i}{\partial \alpha} N_j, N_i \frac{\partial N_j}{\partial \alpha}, \frac{\partial N_i}{\partial \alpha}\frac{\partial N_j}{\partial \alpha}\right) dz \tag{3.36}$$

$$\left(Y^{kij}, Y^{ki_\beta j}, Y^{kij_\beta}, Y^{ki_\beta j_\beta}\right) = \int_{\Omega_k} \left(N_i N_j, \frac{\partial N_i}{\partial \beta} N_j, N_i \frac{\partial N_j}{\partial \beta}, \frac{\partial N_i}{\partial \beta}\frac{\partial N_j}{\partial \beta}\right) dz \tag{3.37}$$

$$\left(Y^{ki_\alpha j_\beta}, Y^{ki_\beta j_\alpha}\right) = \int_{\Omega_k} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \alpha}\frac{\partial N_j}{\partial \beta}, \frac{\partial N_i}{\partial \beta}\frac{\partial N_j}{\partial \alpha}\right) dz \tag{3.38}$$

Vengono definiti i seguenti integrali sul dominio dello spessore A^k:

$$\left(J^{k\tau s}, J^{k\tau s}_{\alpha}, J^{k\tau s}_{\beta}, J^{k\tau s}_{\frac{\alpha}{\beta}}, J^{k\tau s}_{\frac{\beta}{\alpha}}, J^{k\tau s}_{\alpha\beta}\right) = \int_{A_k} F_\tau F_s \left(1, H^k_\alpha, H^k_\beta, \frac{H^k_\alpha}{H^k_\beta}, \frac{H^k_\beta}{H^k_\alpha}, H^k_\alpha H^k_\beta\right) dz \tag{3.39}$$

$$\left(J^{k\tau_z s}, J^{k\tau_z s}_{\alpha}, J^{k\tau_z s}_{\beta}, J^{k\tau_z s}_{\frac{\alpha}{\beta}}, J^{k\tau_z s}_{\frac{\beta}{\alpha}}, J^{k\tau_z s}_{\alpha\beta}\right) = \int_{A_k} \frac{\partial F_\tau}{\partial z} F_s \left(1, H^k_\alpha, H^k_\beta, \frac{H^k_\alpha}{H^k_\beta}, \frac{H^k_\beta}{H^k_\alpha}, H^k_\alpha H^k_\beta\right) dz \tag{3.40}$$

$$\left(J^{k\tau s_z}, J^{k\tau s_z}_{\alpha}, J^{k\tau s_z}_{\beta}, J^{k\tau s_z}_{\frac{\alpha}{\beta}}, J^{k\tau s_z}_{\frac{\beta}{\alpha}}, J^{k\tau s_z}_{\alpha\beta}\right) = \int_{A_k} F_\tau \frac{\partial F_s}{\partial z} \left(1, H^k_\alpha, H^k_\beta, \frac{H^k_\alpha}{H^k_\beta}, \frac{H^k_\beta}{H^k_\alpha}, H^k_\alpha H^k_\beta\right) dz \tag{3.41}$$

$$\left(J^{k\tau_z s_z}, J^{k\tau_z s_z}_{\alpha}, J^{k\tau_z s_z}_{\beta}, J^{k\tau_z s_z}_{\frac{\alpha}{\beta}}, J^{k\tau_z s_z}_{\frac{\beta}{\alpha}}, J^{k\tau_z s_z}_{\alpha\beta}\right) = \int_{A_k} \frac{\partial F_\tau}{\partial z}\frac{\partial F_s}{\partial z} \left(1, H^k_\alpha, H^k_\beta, \frac{H^k_\alpha}{H^k_\beta}, \frac{H^k_\beta}{H^k_\alpha}, H^k_\alpha H^k_\beta\right) dz \tag{3.42}$$

3.3.1 Nuclei per le strutture a guscio con carico elettromeccanico

Il nucleo fondamentale $K_{uu}^{k\tau s}$ di dimensioni (3×3) è :

$$K_{uu_{11}}^{k\tau s} = Q_{55}^k\, Y^{kij}\, J_{\alpha\beta}^{k\tau_z s_z} - \frac{Q_{55}^k}{R_\alpha^k}\, Y^{kij}\, J_\beta^{k\tau_z s} - \frac{Q_{55}^k}{R_\alpha^k}\, Y^{kij}\, J_\beta^{k\tau s_z} + Q_{66}^k\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + Q_{16}^k\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} +$$
$$+ Q_{16}^k\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + Q_{11}^k\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} + \frac{Q_{55}^k}{(R_\alpha^k)^2}\, Y^{kij}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} \tag{3.43}$$

$$K_{uu_{12}}^{k\tau s} = Q_{45}^k\, Y^{kij}\, J_{\alpha\beta}^{k\tau_z s_z} - \frac{Q_{45}^k}{R_\beta^k}\, Y^{kij}\, J_\alpha^{k\tau_z s} - \frac{Q_{45}^k}{R_\alpha^k}\, Y^{kij}\, J_\beta^{k\tau s_z} + Q_{26}^k\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + Q_{12}^k\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} +$$
$$+ Q_{66}^k\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + Q_{16}^k\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} + \frac{Q_{45}^k}{R_\alpha^k\, R_\beta^k}\, Y^{kij}\, J^{k\tau s} \tag{3.44}$$

$$K_{uu_{13}}^{k\tau s} = Q_{45}^k\, Y^{kij_\beta}\, J_\alpha^{k\tau_z s} + Q_{55}^k\, Y^{kij_\alpha}\, J_\beta^{k\tau_z s} + Q_{36}^k\, Y^{ki_\beta j}\, J_\alpha^{k\tau s_z} + Q_{13}^k\, Y^{ki_\alpha j}\, J_\beta^{k\tau s_z} - \frac{Q_{45}^k}{R_\alpha^k}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau s} -$$
$$- \frac{Q_{55}^k}{R_\alpha^k}\, Y^{kij_\alpha}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} + \frac{Q_{26}^k}{R_\beta^k}\, Y^{ki_\beta j}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + \frac{Q_{16}^k}{R_\alpha^k}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{12}^k}{R_\beta^k}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{11}^k}{R_\alpha^k}\, Y^{ki_\alpha j}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} \tag{3.45}$$

$$K_{uu_{21}}^{k\tau s} = Q_{45}^k\, Y^{kij}\, J_{\alpha\beta}^{k\tau_z s_z} - \frac{Q_{45}^k}{R_\alpha^k}\, Y^{kij}\, J_\beta^{k\tau_z s} - \frac{Q_{45}^k}{R_\beta^k}\, Y^{kij}\, J_\alpha^{k\tau s_z} + Q_{26}^k\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + Q_{66}^k\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} +$$
$$+ Q_{12}^k\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + Q_{16}^k\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} + \frac{Q_{45}^k}{R_\alpha^k\, R_\beta^k}\, Y^{kij}\, J^{k\tau s} \tag{3.46}$$

$$K_{uu_{22}}^{k\tau s} = Q_{44}^{k}\, Y^{kij}\, J_{\alpha\beta}^{k\tau_z s_z} - \frac{Q_{44}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} - \frac{Q_{44}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + Q_{22}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + Q_{26}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} +$$
$$+ Q_{26}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + Q_{66}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} + \frac{Q_{44}^{k}}{\left(R_{\beta}^{k}\right)^{2}}\, Y^{kij}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} \tag{3.47}$$

$$K_{uu_{23}}^{k\tau s} = Q_{44}^{k}\, Y^{kij_\beta}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} + Q_{45}^{k}\, Y^{kij_\alpha}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} + Q_{23}^{k}\, Y^{ki_\beta j}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + Q_{36}^{k}\, Y^{ki_\alpha j}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} - \frac{Q_{44}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij_\beta}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} -$$
$$- \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{22}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{ki_\beta j}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + \frac{Q_{12}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{26}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{16}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{ki_\alpha j}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} \tag{3.48}$$

$$K_{uu_{31}}^{k\tau s} = Q_{36}^{k}\, Y^{kij_\beta}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} + Q_{13}^{k}\, Y^{kij_\alpha}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} + Q_{45}^{k}\, Y^{ki_\beta j}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + Q_{55}^{k}\, Y^{ki_\alpha j}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} + \frac{Q_{26}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij_\beta}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} +$$
$$+ \frac{Q_{16}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{12}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{11}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{kij_\alpha}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} - \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s} - \frac{Q_{55}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{ki_\alpha j}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} \tag{3.49}$$

$$K_{uu_{32}}^{k\tau s} = Q_{23}^{k}\, Y^{kij_\beta}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} + Q_{36}^{k}\, Y^{kij_\alpha}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} + Q_{44}^{k}\, Y^{ki_\beta j}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + Q_{45}^{k}\, Y^{ki_\alpha j}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} + \frac{Q_{22}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij_\beta}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} +$$
$$+ \frac{Q_{12}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{26}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{16}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{kij_\alpha}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} - \frac{Q_{44}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{ki_\beta j}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} - \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s} \tag{3.50}$$

$$K_{uu_{33}}^{k\tau s} = Q_{33}^{k}\, Y^{kij}\, J_{\alpha\beta}^{k\tau_z s_z} + \frac{Q_{23}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} + \frac{Q_{13}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{kij}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} + \frac{Q_{23}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + \frac{Q_{13}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{kij}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} +$$
$$+ Q_{44}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + Q_{45}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q_{45}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + Q_{55}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} + \frac{2\, Q_{12}^{k}}{R_{\alpha}^{k}\, R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij}\, J^{k\tau s} +$$
$$+ \frac{Q_{22}^{k}}{\left(R_{\beta}^{k}\right)^2}\, Y^{kij}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + \frac{Q_{11}^{k}}{\left(R_{\alpha}^{k}\right)^2}\, Y^{kij}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} \tag{3.51}$$

Il nucleo fondamentale $K_{u\Phi}^{k\tau s}$ di dimensioni (3×1), perchè Φ^k è uno scalare, è :

$$K_{u\Phi_{14}}^{k\tau s} = e_{25}^{k}\, Y^{kij_\beta}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} + e_{15}^{k}\, Y^{kij_\alpha}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} + e_{36}^{k}\, Y^{ki_\beta j}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + e_{31}^{k}\, Y^{ki_\alpha j}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} - \frac{e_{25}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau s} -$$
$$- \frac{e_{15}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{kij_\alpha}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} \tag{3.52}$$

$$K_{u\Phi_{24}}^{k\tau s} = e_{24}^{k}\, Y^{kij_\beta}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} + e_{14}^{k}\, Y^{kij_\alpha}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} + e_{32}^{k}\, Y^{ki_\beta j}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + e_{36}^{k}\, Y^{ki_\alpha j}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} - \frac{e_{24}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij_\beta}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} -$$
$$- \frac{e_{14}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau s} \tag{3.53}$$

$$K_{u\Phi_{34}}^{k\tau s} = e_{33}^{k}\, Y^{kij}\, J_{\alpha\beta}^{k\tau_z s_z} + \frac{e_{32}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, Y^{kij}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + \frac{e_{31}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, Y^{kij}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} + e_{24}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + e_{25}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} +$$
$$+ e_{14}^{k}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + e_{15}^{k}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} \tag{3.54}$$

Il nucleo fondamentale $K^{k\tau s}_{\Phi u}$ di dimensioni (1×3) è :

$$K^{k\tau s}_{\Phi u_{41}} = e^k_{36}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau_z s}_{\alpha} + e^k_{31}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau_z s}_{\beta} + e^k_{25}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s_z}_{\alpha} + e^k_{15}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s_z}_{\beta} - \frac{e^k_{25}}{R^k_\alpha}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s} - \\ - \frac{e^k_{15}}{R^k_\alpha}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s}_{\frac{\beta}{\alpha}} \tag{3.55}$$

$$K^{k\tau s}_{\Phi u_{42}} = e^k_{32}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau_z s}_{\alpha} + e^k_{36}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau_z s}_{\beta} + e^k_{24}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s_z}_{\alpha} + e^k_{14}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s_z}_{\beta} - \frac{e^k_{24}}{R^k_\beta}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s}_{\frac{\alpha}{\beta}} - \\ - \frac{e^k_{14}}{R^k_\beta}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s} \tag{3.56}$$

$$K^{k\tau s}_{\Phi u_{43}} = e^k_{33}\, Y^{kij}\, J^{k\tau_z s_z}_{\alpha\beta} + \frac{e^k_{32}}{R^k_\beta}\, Y^{kij}\, J^{k\tau_z s}_{\alpha} + \frac{e^k_{31}}{R^k_\alpha}\, Y^{kij}\, J^{k\tau_z s}_{\beta} + e^k_{24}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J^{k\tau s}_{\frac{\alpha}{\beta}} + e^k_{14}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} + \\ + e^k_{25}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + e^k_{15}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J^{k\tau s}_{\frac{\beta}{\alpha}} \tag{3.57}$$

Il nucleo fondamentale $K^{k\tau s}_{\Phi\Phi}$ di dimensioni (1×1) è :

$$K^{k\tau s}_{\Phi\Phi_{44}} = -\varepsilon^k_{33}\, Y^{kij}\, J^{k\tau_z s_z}_{\alpha\beta} - \varepsilon^k_{22}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J^{k\tau s}_{\frac{\alpha}{\beta}} - \varepsilon^k_{12}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} - \varepsilon^k_{12}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} - \varepsilon^k_{11}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J^{k\tau s}_{\frac{\beta}{\alpha}}$$

3.3.2 Nuclei per le strutture piastra con carico elettromeccanico

Ponendo R_α e R_β infiniti, si ottengono i nuclei validi per il caso piastra.
Il nucleo fondamentale $K^{k\tau s}_{uu}$ di dimensioni (3×3) è :

$$K^{k\tau s}_{uu_{11}} = Q^k_{55}\, Y^{kij}\, J^{k\tau_z s_z} + Q^k_{66}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q^k_{16}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q^k_{16}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + Q^k_{11}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J^{k\tau s}$$

$$K^{k\tau s}_{uu_{12}} = Q^k_{45}\, Y^{kij}\, J^{k\tau_z s_z} + Q^k_{26}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q^k_{12}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q^k_{66}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + Q^k_{16}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J^{k\tau s}$$

$$K^{k\tau s}_{uu_{13}} = Q^k_{45}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau_z s} + Q^k_{55}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau_z s} + Q^k_{36}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s_z} + Q^k_{13}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s_z}$$

$$K^{k\tau s}_{uu_{21}} = Q^k_{45}\, Y^{kij}\, J^{k\tau_z s_z} + Q^k_{26}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q^k_{66}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q^k_{12}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + Q^k_{16}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J^{k\tau s}$$

$$K^{k\tau s}_{uu_{22}} = Q^k_{44}\, Y^{kij}\, J^{k\tau_z s_z} + Q^k_{22}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q^k_{26}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q^k_{26}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + Q^k_{66}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J^{k\tau s}$$

$$K^{k\tau s}_{uu_{23}} = Q^k_{44}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau_z s} + Q^k_{45}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau_z s} + Q^k_{23}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s_z} + Q^k_{36}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s_z}$$

$$K^{k\tau s}_{uu_{31}} = Q^k_{36}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau_z s} + Q^k_{13}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau_z s} + Q^k_{45}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s_z} + Q^k_{55}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s_z}$$

$$K^{k\tau s}_{uu_{32}} = Q^k_{23}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau_z s} + Q^k_{36}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau_z s} + Q^k_{44}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s_z} + Q^k_{45}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s_z}$$

$$K^{k\tau s}_{uu_{33}} = Q^k_{33}\, Y^{kij}\, J^{k\tau_z s_z} + Q^k_{44}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q^k_{45}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} + Q^k_{45}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + Q^k_{55}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J^{k\tau s}$$

Il nucleo fondamentale $K^{k\tau s}_{u\Phi}$ di dimensioni (3×1), perchè Φ^k è uno scalare, è :

$$K^{k\tau s}_{u\Phi_{14}} = e^k_{25}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau_z s} + e^k_{15}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau_z s} + e^k_{36}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s_z} + e^k_{31}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s_z}$$

$$K^{k\tau s}_{u\Phi_{24}} = e^k_{24}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau_z s} + e^k_{14}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau_z s} + e^k_{32}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s_z} + e^k_{36}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s_z}$$

$$K^{k\tau s}_{u\Phi_{34}} = e^k_{33}\, Y^{kij}\, J^{k\tau_z s_z} + e^k_{24}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J^{k\tau s} + e^k_{25}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} + e^k_{14}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + e^k_{15}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J^{k\tau s}$$

Il nucleo fondamentale $K^{k\tau s}_{\Phi u}$ di dimensioni (1×3) è :

$$K^{k\tau s}_{\Phi u_{41}} = e^k_{36}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau_z s} + e^k_{31}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau_z s} + e^k_{25}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s_z} + e^k_{15}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s_z}$$

$$K^{k\tau s}_{\Phi u_{42}} = e^k_{32}\, Y^{kij_\beta}\, J^{k\tau_z s} + e^k_{36}\, Y^{kij_\alpha}\, J^{k\tau_z s} + e^k_{24}\, Y^{ki_\beta j}\, J^{k\tau s_z} + e^k_{14}\, Y^{ki_\alpha j}\, J^{k\tau s_z}$$

$$K^{k\tau s}_{\Phi u_{43}} = e^k_{33}\, Y^{kij}\, J^{k\tau_z s_z} + e^k_{24}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J^{k\tau s} + e^k_{14}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} + e^k_{25}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} + e^k_{15}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J^{k\tau s}$$

Il nucleo fondamentale $K^{k\tau s}_{\Phi\Phi}$ di dimensioni (1×1) è :

$$K^{k\tau s}_{\Phi\Phi_{44}} = -\varepsilon^k_{33}\, Y^{kij}\, J^{k\tau_z s_z} - \varepsilon^k_{22}\, Y^{ki_\beta j_\beta}\, J^{k\tau s} - \varepsilon^k_{12}\, Y^{ki_\alpha j_\beta}\, J^{k\tau s} - \varepsilon^k_{12}\, Y^{ki_\beta j_\alpha}\, J^{k\tau s} - \varepsilon^k_{11}\, Y^{ki_\alpha j_\alpha}\, J^{k\tau s}$$

Capitolo 4

Metodo MITC

4.1 Preliminari

Tra le tecniche computazionali utilizzate per le analisi delle strutture multistrato, un ruolo predominante è giocato dal Finite Element Method (FEM). La maggior parte degli elementi finiti, trovati in letteratura, sono formulati su basi di teorie di tipo assiomatico. In accordo con MacNeal [17] le prime analisi FEM furono pubblicate nel 1961. La maggior parte delle prime simulazioni FEM sono state calcolate con la classica teoria di Kirchhoff-Love ed alcuni esempi sono dati da [18]- [19]. Ma, era difficile soddisfare i requisiti di compatibilità nelle analisi di gusci sottili perchè le rotazioni erano derivate dallo spostamento trasversale. Per questa ragione, gli elementi plate/shell che includono effetti classici dovuti al taglio trasversale (FSDT) sono stati sviluppati da Pryor e Barker [20], Noor [21], Hughes [22], Panda and Natarayan [23], Parisch [24], Ferreira [25] e molti altri. Comunque, i primi tipi di elementi FSDT mostrarono grandi limiti di rigidezza in piastre e gusci sottili. Tali meccanismi numerici, conosciuti come shear o membrane locking, furono contrastati mediante implementazione di tecniche numeriche, come la riduzione/selezione di schemi di integrazione [26]- [27]. Ma, si introducono modi spuri a causa di queste tecniche di sotto integrazione. In [28] e [29], Chinosi e al. sviluppano un hierarchic finite element per modelli a guscio sottile [30] che può contrastare il locking per i problemi shell nella loro formulazione agli spostamenti. Comunque, nel caso di spessori molto piccoli e quando non è richiesto un elevato ordine di sviluppo dell'elemento, la soluzione numerica mostra una diminuzione di convergenza. Il metodo Mixed Interpolation of Tensorial Components (MITC) è stato implementato per superare tutti questi problemi. Molti articoli di Bathe e altri sono a disposizione su questo argomento: un esempio sono gli articoli [31]- [32]. Arnold e Brezzi [33] hanno affrontato una formulazione mista del modello di Naghdi, proponendo una famiglia di elementi locking free e provando la convergenza del loro approccio numerico. Similmente, Ramm e Bischoff [34]- [35] svilupparono un elemento finito shell basato su una teoria a 7 parametri, in cui il termine extra di deformazione è incorporato tramite l'elaborata assunzione del concetto di deformazione proposta da Simo e Rafai [36].
Anche una grande varietà di implementazioni di elementi finiti plate/shell di teorie di

alto ordine (HOT) sono state proposte in letteratura negli ultimi venti anni. Gli elementi finiti HOT-based C^0 (C^0 significa che la continuità è richiesta solo per le variabili incognite e non per le loro derivate) sono stati discussi da Kant e co-autori [37], [38]. In [39]- [40], Polit et al. hanno proposto un elemento finito C^1 triangolare a 6 nodi in cui le deformazioni trasversale a taglio sono rappresentate dalle funzioni coseno. Questo elemento è in grado di assicurare le condizioni di continuità per gli spostamenti e per le tensioni trasversali di taglio alle interfacce tra gli strati delle strutture laminate. Una discussione comprensiva delle teorie HOT-type e della convenienza del relativo elemento finito è stata procurata da Tessler [41]. Molti altri articoli sono ottenibili in cui le HOT sono state implementate per piastre/gusci, dettagli possono essere trovati nei libri di Reddy [42] e Palazotto e Dennis [43].
Dozzine di elementi finiti basati sulle teorie zig-zag sono stati proposti [44], [45]. Implementazioni agli elementi finiti di teorie layer-wise nel contesto delle teorie di tipo assiomatico sono state proposte da molti autori, tra i quali Noor e Burton [46], Reddy [47], Mawenya e Davies [48], Pinsky e Kim [49], Chaudhuri e Seide [50], Rammerstorfer et al. [51]. Infine, l'elemento finito presentato in questo lavoro è basato sui modelli equivalent-single-layer, zig-zag e layer-wise contenuti nella CUF [52], [53], [54] e utilizza il metodo MITC per contrastare il membrane e shear locking.

4.2 Elemento CUF MITC

In questo lavoro sono stati usati elementi a 9 nodi e sono state usate le funzioni di forma Lagrangiane per interpolare gli spostamenti. Queste funzioni sono state ottenute imponendo che le N_i assumano valore 1 nei nodi i e 0 negli altri, e sono espresse nel sistema di riferimento locale dell'elemento (ξ, η) (vedi figura 4.1), seguente:

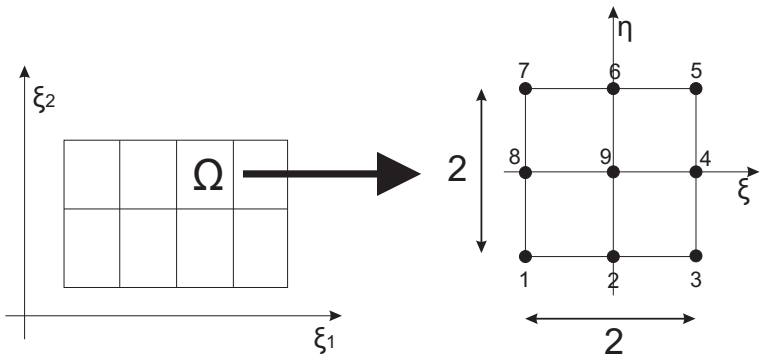

Figura 4.1: Sistema locale di riferimento dell'elemento.

$$
\begin{aligned}
N_1 =& \frac{1}{4}\left(\xi^2 - \xi\right)\left(\eta^2 - \eta\right), \\
N_2 =& \frac{1}{2}\left(1 - \xi^2\right)\left(\eta^2 - \eta\right), \\
N_3 =& \frac{1}{4}\left(\xi^2 + \xi\right)\left(\eta^2 - \eta\right), \\
N_4 =& \frac{1}{2}\left(\xi^2 + \xi\right)\left(1 - \eta^2\right), \\
N_5 =& \frac{1}{4}\left(\xi^2 + \xi\right)\left(\eta^2 + \eta\right), \\
N_6 =& \frac{1}{2}\left(1 - \xi^2\right)\left(\eta^2 + \eta\right), \\
N_7 =& \frac{1}{4}\left(\xi^2 - \xi\right)\left(\eta^2 + \eta\right), \\
N_8 =& \frac{1}{2}\left(\xi^2 - \xi\right)\left(1 - \eta^2\right), \\
N_9 =& \left(1 - \xi^2\right)\left(1 - \eta^2\right).
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Sostituendo gli spostamenti nelle relazioni geometriche si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_p^k =& F_\tau(\boldsymbol{D}_p^k + \boldsymbol{A}_p^k)(N_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{q}_{\tau_i}^k, \\
\boldsymbol{\varepsilon}_n^k =& F_\tau(\boldsymbol{D}_{n\Omega}^k - \boldsymbol{A}_n^k)(N_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{q}_{\tau_i}^k + F_{\tau,z}\boldsymbol{A}_{nz}^k(N_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{q}_{\tau_i}^k,
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

dove $\boldsymbol{I}$ è una matrice identità (3×3).

Considerando le componenti del tensore delle deformazioni nel sistema di riferimento locale (ξ, η), gli elementi *shell* MITC sono formulati usando al posto delle componenti di deformazione, direttamente calcolate dagli spostamenti, una interpolazione di queste componenti di deformazione per ogni elemento usando una specifica strategia di interpolazione per ogni componente. I corrispondenti punti di interpolazione, chiamati *tying points*, sono mostrati nella figura 4.2 per l'elemento *shell* a 9 nodi.

Le componenti di deformazione ε_{11} e ε_{13} sono interpolate nei punti $(A1, B1, C1, D1, E1, F1)$ dalle seguenti funzioni (che sono ottenute come le funzioni di forma):

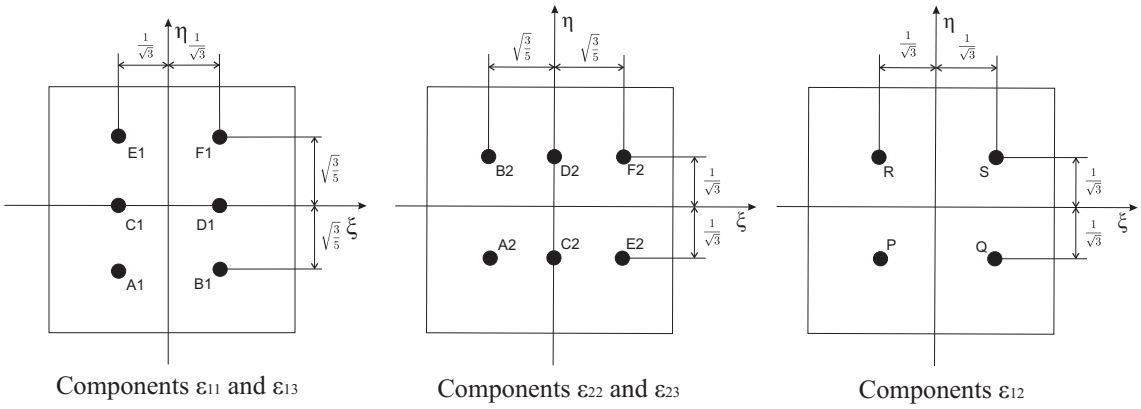

Figura 4.2: Tying points per gli elementi finiti *shell* MITC9 .

$$
\begin{aligned}
N_{A1} =& \frac{5\sqrt{3}}{12}\eta\Big(\eta - \sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \xi\Big)\,,\\
N_{B1} =& \frac{5\sqrt{3}}{12}\eta\Big(\eta - \sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} + \xi\Big)\,,\\
N_{C1} =& -\frac{5\sqrt{3}}{6}\Big(\eta + \sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\Big(\eta - \sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \xi\Big)\,,\\
N_{D1} =& -\frac{5\sqrt{3}}{6}\Big(\eta + \sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\Big(\eta - \sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} + \xi\Big)\,,\\
N_{E1} =& \frac{5\sqrt{3}}{12}\Big(\eta + \sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\eta\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \xi\Big)\,,\\
N_{F1} =& \frac{5\sqrt{3}}{12}\Big(\eta + \sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\eta\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} + \xi\Big)\,.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Per le componenti ε_{22} e ε_{23}, le funzioni di interpolazione sui punti $(A2, B2, C2, D2, E2, F2)$ sono:

$$
\begin{aligned}
N_{A2} =& \frac{5\sqrt{3}}{12}\xi\Big(\xi - \sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \eta\Big)\,, \\
N_{B2} =& \frac{5\sqrt{3}}{12}\xi\Big(\xi - \sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} + \eta\Big)\,, \\
N_{C2} =& -\frac{5\sqrt{3}}{6}\Big(\xi + \sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\Big(\xi - \sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \eta\Big)\,, \\
N_{D2} =& -\frac{5\sqrt{3}}{6}\Big(\xi + \sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\Big(\xi - \sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} + \eta\Big)\,, \\
N_{E2} =& \frac{5\sqrt{3}}{12}\Big(\xi + \sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\xi\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \eta\Big)\,, \\
N_{F2} =& \frac{5\sqrt{3}}{12}\Big(\xi + \sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\xi\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} + \eta\Big)\,.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Infine, le funzioni di interpolazione sui punti (P, Q, R, S) per la deformazione ε_{12} sono:

$$
\begin{aligned}
N_P =& \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \xi\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \eta\Big)\,, \\
N_Q =& \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} + \xi\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \eta\Big)\,, \\
N_R =& \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \xi\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} + \eta\Big)\,, \\
N_S =& \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} + \xi\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{3}} + \eta\Big)\,.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

La componente di deformazione ε_{33} è direttamente calcolata dagli spostamenti.
Per motivi di convenienza, le funzioni interpolanti sono stati riorganizzate nei seguenti vettori:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_{m1} &= [N_{A1}, N_{B1}, N_{C1}, N_{D1}, N_{E1}, N_{F1}]\,, \\
\boldsymbol{N}_{m2} &= [N_{A2}, N_{B2}, N_{C2}, N_{D2}, N_{E2}, N_{F2}]\,, \\
\boldsymbol{N}_{m3} &= [N_P, N_Q, N_R, N_S]\,.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

In accordo con il metodo MITC, le componenti di deformazione sono scritte nel modo seguente:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_{m1} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{N}_{m2} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{N}_{m3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{11_{m1}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{22_{m2}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{12_{m3}} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{N}_1 \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{11_{m1}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{22_{m2}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{12_{m3}} \end{Bmatrix} ,$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_{m1} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{N}_{m2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{13_{m1}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{23_{m2}} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{N}_2 \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{13_{m1}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{23_{m2}} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} , \tag{4.7}$$

Dove le matrici $\boldsymbol{N}_1$ e $\boldsymbol{N}_2$ sono state introdotte e i vettori delle deformazioni sono:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{11_{m1}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}(A1) \\ \varepsilon_{11}(B1) \\ \varepsilon_{11}(C1) \\ \varepsilon_{11}(D1) \\ \varepsilon_{11}(E1) \\ \varepsilon_{11}(F1) \end{Bmatrix} , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{22_{m2}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{22}(A2) \\ \varepsilon_{22}(B2) \\ \varepsilon_{22}(C2) \\ \varepsilon_{22}(D2) \\ \varepsilon_{22}(E2) \\ \varepsilon_{22}(F2) \end{Bmatrix} , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{12_{m3}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{12}(P) \\ \varepsilon_{12}(Q) \\ \varepsilon_{12}(R) \\ \varepsilon_{12}(S) \end{Bmatrix} ,$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{13_{m1}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{13}(A1) \\ \varepsilon_{13}(B1) \\ \varepsilon_{13}(C1) \\ \varepsilon_{13}(D1) \\ \varepsilon_{13}(E1) \\ \varepsilon_{13}(F1) \end{Bmatrix} , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{23_{m2}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{23}(A2) \\ \varepsilon_{23}(B2) \\ \varepsilon_{23}(C2) \\ \varepsilon_{23}(D2) \\ \varepsilon_{23}(E2) \\ \varepsilon_{23}(F2) \end{Bmatrix} . \tag{4.8}$$

La notazione (m) indica che le deformazioni sono calcolate sui tying point m usando le relazioni geometriche . Per esempio, se si considera la deformazione ε_{11} calcolata nel punto $A1$, si ottiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{11}(A1) = F_\tau(\boldsymbol{D}_p + \boldsymbol{A}_p)_{(1,:)}\, N_i(\xi_{A1}, \eta_{A1})\boldsymbol{q}_{\tau_i} , \tag{4.9}$$

dove $(1,:)$ significa che la prima riga della matrice $(\boldsymbol{D}_p + \boldsymbol{A}_p)$ è considerata e ξ_{A1}, η_{A1} sono le coordinate del punto $A1$.
In accordo con questa interpolazione, le relazioni geometriche possono essere riscritte nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{k\tau}_{p_{im}} &= F_\tau \boldsymbol{C}^k_{3_{im}} \boldsymbol{q}^k_{\tau_i} , \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{k\tau}_{n_{im}} &= F_\tau \boldsymbol{C}^k_{1_{im}} \boldsymbol{q}^k_{\tau_i} + F_{\tau,z} \boldsymbol{C}^k_{2_{im}} \boldsymbol{q}^k_{\tau_i} , \end{aligned} \tag{4.10}$$

dove m indica un ciclo sui tying points e le matrici introdotte sono:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}^k_{1_{im}} =& \boldsymbol{N}_2 \begin{bmatrix} (\boldsymbol{D}^k_{n\Omega} - \boldsymbol{A}^k_n)_{(1,:)}(N_i\boldsymbol{I})_{m1} \\ (\boldsymbol{D}^k_{n\Omega} - \boldsymbol{A}^k_n)_{(2,:)}(N_i\boldsymbol{I})_{m2} \\ (\boldsymbol{D}^k_{n\Omega} - \boldsymbol{A}^k_n)_{(3,:)}(N_i\boldsymbol{I}) \end{bmatrix} , \\
\boldsymbol{C}^k_{2_{im}} =& \boldsymbol{N}_2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^k_{nz(1,:)}(N_i\boldsymbol{I})_{m1} \\ \boldsymbol{A}^k_{nz(2,:)}(N_i\boldsymbol{I})_{m2} \\ \boldsymbol{A}^k_{nz(3,:)}(N_i\boldsymbol{I}) \end{bmatrix} , \\
\boldsymbol{C}^k_{3_{im}} =& \boldsymbol{N}_1 \begin{bmatrix} (\boldsymbol{D}^k_{p} + \boldsymbol{A}^k_p)_{(1,:)}(N_i\boldsymbol{I})_{m1} \\ (\boldsymbol{D}^k_{p} + \boldsymbol{A}^k_p)_{(2,:)}(N_i\boldsymbol{I})_{m2} \\ (\boldsymbol{D}^k_{p} + \boldsymbol{A}^k_p)_{(3,:)}(N_i\boldsymbol{I})_{m3} \end{bmatrix} .
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Le nuove funzioni di forma N_{m1}, N_{m2}, N_{m3} sono contenute nelle matrici $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$, mentre le funzioni di forma lagrangiane, valutate nei *tying points*, che qui sono indicate in forma matriciale come $(N_i\boldsymbol{I})_{m1\,;\,m2\,;\,m3}$ saranno rappresentate nei nuclei come $N_i^{(m1)}$, $N_i^{(m2)}$, $N_i^{(m3)}$.

4.3 PVD(u) per il caso puramente meccanico MITC

Assumendo come nota l'equazione del PVD (3.2), sostituendo le equazioni costitutive (3.3),(3.4) e quelle delle relazioni geometriche con correzione MITC (4.10) nel principio variazionale dell'equazione (3.2) e applicando una approssimazione 2D, in accordo con la teoria CUF, che permette di esprimere le variabili incognite tramite le cosiddette *thickness function*:

$$
\boldsymbol{u}\,(\alpha,\beta,z) \;=\; F_\tau(z)\,\boldsymbol{u}_\tau(\alpha,\beta) \qquad\qquad \delta\boldsymbol{u}\,(\alpha,\beta,z) \;=\; F_s(z)\,\delta\boldsymbol{u}_s(\alpha,\beta)
$$

Inoltre in accordo con l'approssimazione agli elementi finiti si introducono le funzioni di forma che permettono di esprimere le variabili incognite in funzione dei valori nodali:

$$
\boldsymbol{u}\,(\alpha,\beta,z) \;=\; F_\tau(z)\,N_i(\xi,\eta)\,\boldsymbol{q}_{\tau i} \qquad\qquad \delta\boldsymbol{u}\,(\alpha,\beta,z) \;=\; F_s(z)\,N_j(\xi,\eta)\,\delta\boldsymbol{q}_{sj}
$$

Si ottiene:

$$\int_{\Omega_k}\int_{A_k}\left\{\left[F_s C^k_{3_{nj}}\, q^k_{sj}\right]^T \times \left[Q^k_{pp}\left(C^k_{3_{mi}}\right) + Q^k_{pn}\left(C^k_{1_{mi}} + C^k_{2_{mi}}\right)\right]\left\{F_\tau\, q^k_{\tau i}\right\} + \left[\left(C^k_{1_{nj}} + C^k_{2_{nj}}\right) F_s\, q^k_{sj}\right]^T \times \right.$$
$$\left. \times \left[Q^k_{np}\left(C^k_{3_{mi}}\right) + Q^k_{nn}\left(C^k_{1_{nj}} + C^k_{2_{nj}}\right)\right]\left\{F_\tau\, q^k_{\tau i}\right\}\right\} H_\alpha H_\beta\, d\Omega_k dz = \delta L^k_e \tag{4.12}$$

Sostituendo le espressioni suddette nel principio variazionale (3.6), per un laminato multistrato si ottiene un sistema di equazioni di equilibrio che può essere scritto in forma compatta con la seguente espressione:

$$\delta \boldsymbol{q}^k_{sj} \;:\; \boldsymbol{K}^{k\tau sij}\, \boldsymbol{q}^k_{\tau i} \;=\; \boldsymbol{F}^k_{sj} \tag{4.13}$$

dove $\boldsymbol{F}$ rappresenta il vettore dei carichi nodali mentre $\boldsymbol{q}$ esprimono le condizioni al contorno. Nell'equazione $\boldsymbol{\tau}$ *e* $\boldsymbol{s}$ variano tra 0 e N (ordine di espansione), $\boldsymbol{i}$ *e* $\boldsymbol{j}$ variano tra $1\, e\, N_n$ (numero di nodi), $\boldsymbol{k}$ è il numero di strati del laminato.

La matrice $\boldsymbol{K}^{k\tau sij}$ è il nucleo di rigidezza fondamentale dell'elemento finito e può essere calcolata attraverso una integrazione numerica delle funzioni di forma nel piano e lungo lo spessore. Per il caso puramente meccanico la matrice $\boldsymbol{K}^{k\tau sij}$ ha dimensione (3×3) perchè nel PVD(u) ci sono 3 variabili (le componenti di spostamento):

$$\boldsymbol{K}^{k\tau sij} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} & \boldsymbol{K}_{13} \\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22} & \boldsymbol{K}_{23} \\ \boldsymbol{K}_{31} & \boldsymbol{K}_{32} & \boldsymbol{K}_{33} \end{bmatrix}^{k\tau sij} \tag{4.14}$$

Per una scrittura più compatta dei nuclei, vengono definiti i seguenti integrali nel piano Ω^k con le nuove funzioni di forma:

$$\left(W^k_{m1\,n1}\,;\, W^k_{m1\,n2}\,;\, W^k_{m2\,n1}\,;\, W^k_{m2\,n2}\right) = \int_{\Omega_k} \left(N_{m1}N_{n1}\,;\, N_{m1}N_{n2}\,;\, N_{m2}N_{n1}\,;\, N_{m2}N_{n2}\right) dz \tag{4.15}$$

$$\left(W^k_{m1\,n3}\,;\, W^k_{m3\,n1}\,;\, W^k_{m3\,n3}\,;\, W^k_{m2\,n3}\,;\, W^k_{m3\,n2}\right) = \int_{\Omega_k} \left(N_{m1}N_{n3}\,;\, N_{m3}N_{n1}\,;\, N_{m3}N_{n3}\,;\, N_{m2}N_{n3}\,;\, N_{m3}N_{n2}\right) dz \tag{4.16}$$

Sono definiti i seguenti integrali nel piano Ω^k tra le funzioni di forma nuove e quelle definite sui nodi di partenza:

$$\left(W^k_{m1\,j}\,;\,W^k_{m2\,j}\,;\,W^k_{m3\,j}\right) = \int\limits_{\Omega_k} \left(N_{m1}N_j\,;\,N_{m2}N_j\,;\,N_{m3}N_j\right) dz \tag{4.17}$$

$$\left(W^k_{i\,n1}\,;\,W^k_{i\,n2}\,;\,W^k_{i\,n3}\,;\,W^k_{i\,j}\right) = \int\limits_{\Omega_k} \left(N_iN_{n1}\,;\,N_iN_{n2}\,;\,N_iN_{n3}\,;\,N_iN_j\right) dz \tag{4.18}$$

$$\left(W^k_{m1\,j,\alpha}\,;\,W^k_{m1\,j,\beta}\,;\,W^k_{m2\,j,\alpha}\,;\,W^k_{m2\,j,\beta}\right) = \int\limits_{\Omega_k} \left(N_{m1}\frac{\partial N_j}{\partial\alpha}\,;\,N_{m1}\frac{\partial N_j}{\partial\beta}\,;\,N_{m2}\frac{\partial N_j}{\partial\alpha}\,;\,N_{m2}\frac{\partial N_j}{\partial\beta}\right) dz \tag{4.19}$$

$$\left(W^k_{i,\alpha\,n1}\,;\,W^k_{i,\beta\,n1}\,;\,W^k_{i,\alpha\,n2}\,;\,W^k_{i,\beta\,n2}\right) = \int\limits_{\Omega_k} \left(\frac{\partial N_i}{\partial\alpha}N_{n1}\,;\,\frac{\partial N_i}{\partial\beta}N_{n1}\,;\,\frac{\partial N_i}{\partial\alpha}N_{n2}\,;\,\frac{\partial N_i}{\partial\beta}N_{n2}\right) dz \tag{4.20}$$

Vengono definiti i seguenti integrali sul dominio dello spessore A^k:

$$\left(J^{k\tau s}, J^{k\tau s}_{\alpha}, J^{k\tau s}_{\beta}, J^{k\tau s}_{\frac{\alpha}{\beta}}, J^{k\tau s}_{\frac{\beta}{\alpha}}, J^{k\tau s}_{\alpha\beta}\right) = \int\limits_{A_k} F_\tau F_s \left(1, H^k_\alpha, H^k_\beta, \frac{H^k_\alpha}{H^k_\beta}, \frac{H^k_\beta}{H^k_\alpha}, H^k_\alpha H^k_\beta\right) dz \tag{4.21}$$

$$\left(J^{k\tau_z s}, J^{k\tau_z s}_{\alpha}, J^{k\tau_z s}_{\beta}, J^{k\tau_z s}_{\frac{\alpha}{\beta}}, J^{k\tau_z s}_{\frac{\beta}{\alpha}}, J^{k\tau_z s}_{\alpha\beta}\right) = \int\limits_{A_k} \frac{\partial F_\tau}{\partial z} F_s \left(1, H^k_\alpha, H^k_\beta, \frac{H^k_\alpha}{H^k_\beta}, \frac{H^k_\beta}{H^k_\alpha}, H^k_\alpha H^k_\beta\right) dz \tag{4.22}$$

$$\left(J^{k\tau s_z}, J^{k\tau s_z}_{\alpha}, J^{k\tau s_z}_{\beta}, J^{k\tau s_z}_{\frac{\alpha}{\beta}}, J^{k\tau s_z}_{\frac{\beta}{\alpha}}, J^{k\tau s_z}_{\alpha\beta}\right) = \int_{A_k} F_\tau \frac{\partial F_s}{\partial z} \left(1, H^k_\alpha, H^k_\beta, \frac{H^k_\alpha}{H^k_\beta}, \frac{H^k_\beta}{H^k_\alpha}, H^k_\alpha H^k_\beta\right) dz \tag{4.23}$$

$$\left(J^{k\tau_z s_z}, J^{k\tau_z s_z}_{\alpha}, J^{k\tau_z s_z}_{\beta}, J^{k\tau_z s_z}_{\frac{\alpha}{\beta}}, J^{k\tau_z s_z}_{\frac{\beta}{\alpha}}, J^{k\tau_z s_z}_{\alpha\beta}\right) = \int_{A_k} \frac{\partial F_\tau}{\partial z} \frac{\partial F_s}{\partial z} \left(1, H^k_\alpha, H^k_\beta, \frac{H^k_\alpha}{H^k_\beta}, \frac{H^k_\beta}{H^k_\alpha}, H^k_\alpha H^k_\beta\right) dz \tag{4.24}$$

4.3.1 Nuclei MITC per le strutture a guscio con carico puramente meccanico

Il nucleo fondamentale $K^{k\tau s}_{uu}$ di dimensioni (3×3) è :

$$\begin{aligned} K^{k\tau s}_{uu_{11}} &= Q^k_{55}\, N^{(m1)}_i N^{(n1)}_j\, W^k_{m1\,n1}\, J^{k\tau_z s_z}_{\alpha\beta} - \frac{Q^k_{55}}{R^k_\alpha}\, N^{(m1)}_i N^{(n1)}_j\, W^k_{m1\,n1}\, J^{k\tau_z s}_{\beta} - \frac{Q^k_{55}}{R^k_\alpha}\, N^{(m1)}_i N^{(n1)}_j\, W^k_{m1\,n1}\, J^{k\tau s_z}_{\beta} + \\ &+ Q^k_{66}\, N^{(m3)}_{i,\beta} N^{(n3)}_{j,\beta}\, W^k_{m3\,n3}\, J^{k\tau s}_{\frac{\alpha}{\beta}} + Q^k_{16}\, N^{(m1)}_{i,\alpha} N^{(n3)}_{j,\beta}\, W^k_{m1\,n3}\, J^{k\tau s} + Q^k_{16}\, N^{(m3)}_{i,\beta} N^{(n1)}_{j,\alpha}\, W^k_{m3\,n1}\, J^{k\tau s} + \\ &+ Q^k_{11}\, N^{(m1)}_{i,\alpha} N^{(n1)}_{j,\alpha}\, W^k_{m1\,n1}\, J^{k\tau s}_{\frac{\beta}{\alpha}} + \frac{Q^k_{55}}{(R^k_\alpha)^2}\, N^{(m1)}_i N^{(n1)}_j\, W^k_{m1\,n1}\, J^{k\tau s}_{\frac{\beta}{\alpha}} \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned} K^{k\tau s}_{uu_{12}} &= Q^k_{45}\, N^{(m1)}_i N^{(n2)}_j\, W^k_{m1\,n2}\, J^{k\tau_z s_z}_{\alpha\beta} - \frac{Q^k_{45}}{R^k_\beta}\, N^{(m1)}_i N^{(n2)}_j\, W^k_{m1\,n2}\, J^{k\tau_z s}_{\alpha} - \frac{Q^k_{45}}{R^k_\alpha}\, N^{(m1)}_i N^{(n2)}_j\, W^k_{m1\,n2}\, J^{k\tau s_z}_{\beta} + \\ &+ Q^k_{26}\, N^{(m3)}_{i,\beta} N^{(n2)}_{j,\beta}\, W^k_{m3\,n2}\, J^{k\tau s}_{\frac{\alpha}{\beta}} + Q^k_{12}\, N^{(m1)}_{i,\alpha} N^{(n2)}_{j,\beta}\, W^k_{m1\,n2}\, J^{k\tau s} + Q^k_{66}\, N^{(m3)}_{i,\beta} N^{(n3)}_{j,\alpha}\, W^k_{m3\,n3}\, J^{k\tau s} + \\ &+ Q^k_{16}\, N^{(m1)}_{i,\alpha} N^{(n3)}_{j,\alpha}\, W^k_{m1\,n3}\, J^{k\tau s}_{\frac{\beta}{\alpha}} + \frac{Q^k_{45}}{R^k_\alpha R^k_\beta}\, N^{(m1)}_i N^{(n2)}_j\, W^k_{m1\,n2}\, J^{k\tau s} \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$
\begin{aligned}
K_{uu_{13}}^{k\tau s} &= Q_{45}^{k}\, N_{i}^{(m1)} N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{m1\,n2}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} + Q_{55}^{k}\, N_{i}^{(m1)} N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{m1\,n1}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} + Q_{36}^{k}\, N_{i,\beta}^{(m3)}\, W_{m3\,j}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + \\
&+ Q_{13}^{k}\, N_{i,\alpha}^{(m1)}\, W_{m1\,j}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} - \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i}^{(m1)} N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{m1\,n2}^{k}\, J^{k\tau s} - \frac{Q_{55}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i}^{(m1)} N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{m1\,n1}^{k}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} + \\
&+ \frac{Q_{26}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i,\beta}^{(m3)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m3\,n2}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + \frac{Q_{16}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i,\beta}^{(m3)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m3\,n1}^{k}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{12}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i,\alpha}^{(m1)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m1\,n2}^{k}\, J^{k\tau s} + \\
&+ \frac{Q_{11}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i,\alpha}^{(m1)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m1\,n1}^{k}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s}
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{uu_{21}}^{k\tau s} &= Q_{45}^{k}\, N_{i}^{(m2)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J_{\alpha\beta}^{k\tau_z s_z} - \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} - \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + \\
&+ Q_{26}^{k}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j,\beta}^{(n3)}\, W_{m2\,n3}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + Q_{66}^{k}\, N_{i,\alpha}^{(m3)} N_{j,\beta}^{(n3)}\, W_{m3\,n3}^{k}\, J^{k\tau s} + Q_{12}^{k}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J^{k\tau s} + \\
&+ Q_{16}^{k}\, N_{i,\alpha}^{(m3)} N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{m3\,n1}^{k}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} + \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\alpha}^{k}\, R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J^{k\tau s}
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{uu_{22}}^{k\tau s} &= Q_{44}^{k}\, N_{i}^{(m2)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\alpha\beta}^{k\tau_z s_z} - \frac{Q_{44}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} - \frac{Q_{44}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + \\
&+ Q_{22}^{k}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + Q_{26}^{k}\, N_{i,\alpha}^{(m3)} N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{m3\,n2}^{k}\, J^{k\tau s} + Q_{26}^{k}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j,\alpha}^{(n3)}\, W_{m2\,n3}^{k}\, J^{k\tau s} + \\
&+ Q_{66}^{k}\, N_{i,\alpha}^{(m3)} N_{j,\alpha}^{(n3)}\, W_{m3\,n3}^{k}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} + \frac{Q_{44}^{k}}{\left(R_{\beta}^{k}\right)^{2}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s}
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{uu_{23}}^{k\tau s} &= Q_{44}^{k}\, N_{i}^{(m2)} N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} + Q_{45}^{k}\, N_{i}^{(m2)} N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} + Q_{23}^{k}\, N_{i,\beta}^{(m2)}\, W_{m2\,j}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + \\
&+ Q_{36}^{k}\, N_{i,\alpha}^{(m3)}\, W_{m3\,j}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} - \frac{Q_{44}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} - \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J^{k\tau s} + \\
&+ \frac{Q_{22}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + \frac{Q_{12}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{26}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i,\alpha}^{(m3)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m3\,n2}^{k}\, J^{k\tau s} + \\
&+ \frac{Q_{16}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i,\alpha}^{(m3)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m3\,n1}^{k}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s}
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{uu_{31}}^{k\tau s} &= Q_{36}^{k}\, N_{j,\beta}^{(n3)}\, W_{i\,n3}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} + Q_{13}^{k}\, N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{i\,n1}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} + Q_{45}^{k}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + \\
&+ Q_{55}^{k}\, N_{i,\alpha}^{(m1)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m1\,n1}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} + \frac{Q_{26}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j,\beta}^{(n3)}\, W_{m2\,n3}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + \frac{Q_{16}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i}^{(m1)} N_{j,\beta}^{(n3)}\, W_{m1\,n3}^{k}\, J^{k\tau s} + \\
&+ \frac{Q_{12}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{11}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i}^{(m1)} N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{m1\,n1}^{k}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} - \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J^{k\tau s} - \\
&- \frac{Q_{55}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i,\alpha}^{(m1)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m1\,n1}^{k}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s}
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{uu_{32}}^{k\tau s} &= Q_{23}^{k}\, N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{i\,n2}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} + Q_{36}^{k}\, N_{j,\alpha}^{(n3)}\, W_{i\,n3}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} + Q_{44}^{k}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + \\
&+ Q_{45}^{k}\, N_{i,\alpha}^{(m1)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m1\,n2}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} + \frac{Q_{22}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + \frac{Q_{12}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i}^{(m1)} N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{m1\,n2}^{k}\, J^{k\tau s} + \\
&+ \frac{Q_{26}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j,\alpha}^{(n3)}\, W_{m2\,n3}^{k}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{16}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i}^{(m1)} N_{j,\alpha}^{(n3)}\, W_{m1\,n3}^{k}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} - \frac{Q_{44}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} - \\
&- \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i,\alpha}^{(m1)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m1\,n2}^{k}\, J^{k\tau s}
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{uu_{33}}^{k\tau s} &= Q_{33}^{k}\, W_{i\,j}^{k}\, J_{\alpha\beta}^{k\tau_z s_z} + \frac{Q_{23}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{j}^{(n2)}\, W_{i\,n2}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} + \frac{Q_{13}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{j}^{(n1)}\, W_{i\,n1}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} + \\
&+ \frac{Q_{23}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)}\, W_{m2\,j}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + \frac{Q_{13}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i}^{(m1)}\, W_{m1\,j}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} + Q_{44}^{k}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + \\
&+ Q_{45}^{k}\, N_{i,\alpha}^{(m1)} N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{m1\,n2}^{k}\, J^{k\tau s} + Q_{45}^{k}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J^{k\tau s} + Q_{55}^{k}\, N_{i,\alpha}^{(m1)} N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{m1\,n1}^{k}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} + \\
&+ \frac{Q_{12}^{k}}{R_{\alpha}^{k}\, R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m1)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m1\,n2}^{k}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{12}^{k}}{R_{\alpha}^{k}\, R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J^{k\tau s} + \\
&+ \frac{Q_{22}^{k}}{\left(R_{\beta}^{k}\right)^{2}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + \frac{Q_{11}^{k}}{\left(R_{\alpha}^{k}\right)^{2}}\, N_{i}^{(m1)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m1\,n1}^{k}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s}
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

4.4 PVD(u,Φ) per il caso elettromeccanico MITC

Assumendo come nota l'equazione del PVD (3.26), sostituendo le equazioni costitutive (3.27),(3.28),(3.29),(3.30) e quelle delle relazioni geometriche con correzione MITC (4.10) nel principio variazionale dell'equazione (3.26) e applicando una approssimazione 2D, in accordo con la teoria CUF, che permette di esprimere le variabili incognite tramite le cosiddette *thickness function*:

$$\boldsymbol{u}\,(\alpha,\beta,z) \;=\; F_\tau(z)\,\boldsymbol{u}_\tau(\alpha,\beta) \qquad\qquad \delta\boldsymbol{u}\,(\alpha,\beta,z) \;=\; F_s(z)\,\delta\boldsymbol{u}_s(\alpha,\beta)$$

$$\Phi\,(\alpha,\beta,z) \;=\; F_\tau(z)\,\Phi_\tau(\alpha,\beta) \qquad\qquad \delta\Phi\,(\alpha,\beta,z) \;=\; F_s(z)\,\delta\Phi_s(\alpha,\beta)$$

Inoltre in accordo con l'approssimazione agli elementi finiti si introducono le funzioni di forma che permettono di esprimere le variabili incognite in funzione dei valori nodali:

$$\boldsymbol{u}\,(\alpha,\beta,z) \;=\; F_\tau(z)\,N_i(\xi,\eta)\,\boldsymbol{q}_{\tau i} \qquad\qquad \delta\boldsymbol{u}\,(\alpha,\beta,z) \;=\; F_s(z)\,N_j(\xi,\eta)\,\delta\boldsymbol{q}_{sj}$$

$$\Phi\,(\alpha,\beta,z) \;=\; F_\tau(z)\,N_i(\xi,\eta)\,\phi_{\tau i} \qquad\qquad \delta\Phi\,(\alpha,\beta,z) \;=\; F_s(z)\,N_j(\xi,\eta)\,\delta\phi_{sj}$$

Sostituendo tutto nell'equazione del PVD (3.26) si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_k}\int_{A_k}\Bigg\{\left[F_s C^k_{3_{nj}}\right]^T \times \left[Q^k_{pp}\left(C^k_{3_{mi}}\right) + Q^k_{pn}\left(C^k_{1_{mi}} + C^k_{2_{mi}}\right) + e^{k^T}_{pp}\left\{D_{\Phi p}\Phi^k_\tau\right\} + e^{k^T}_{np}\left\{D_{\Phi n}\Phi^k_\tau\right\}\right]\{F_\tau\} + \\
&+ \left[\left(C^k_{1_{nj}} + C^k_{2_{nj}}\right)F_s\right]^T \times \left[Q^k_{np}\left(C^k_{3_{mi}}\right) + Q^k_{nn}\left(C^k_{1_{nj}} + C^k_{2_{nj}}\right) + e^{k^T}_{pn}\left\{D_{\Phi p}\Phi^k_\tau\right\} + e^{k^T}_{nn}\left\{D_{\Phi n}\Phi^k_\tau\right\}\right]\{F_\tau\} + \\
&+ \left[D_{\Phi n}\left\{F_s\Phi^k_s\right\}\right]^T \times \left[e^k_{np}\left(C^k_{3_{mi}}\right) + e^k_{nn}\left(C^k_{1_{mi}} + C^k_{2_{mi}}\right) - \varepsilon^k_{np}\left\{D_{\Phi p}\Phi^k_\tau\right\} - \varepsilon^k_{nn}\left\{D_{\Phi n}\Phi^k_\tau\right\}\right]\{F_\tau\} + \\
&+ \left[D_{\Phi p}\left\{F_s\Phi^k_s\right\}\right]^T \times \left[e^k_{pp}\left(C^k_{3_{mi}}\right) + e^k_{pn}\left(C^k_{1_{mi}} + C^k_{2_{mi}}\right) - \varepsilon^k_{pp}\left\{D_{\Phi p}\Phi^k_\tau\right\} - \varepsilon^k_{pn}\left\{D_{\Phi n}\Phi^k_\tau\right\}\right]\{F_\tau\}\Bigg\} H_\alpha H_\beta\, d\Omega_k \\
&= \delta L^k_e
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Sostituendo le espressioni suddette nel principio variazionale (4.34), per un laminato multistrato si ottiene un sistema di equazioni di equilibrio che può essere scritto in forma compatta con la seguente espressione:

$$\delta\boldsymbol{q}^k_{sj} \;:\; \boldsymbol{K}^{k\tau sij}\,\boldsymbol{q}^k_{\tau i} \;=\; \boldsymbol{F}^k_{sj} \tag{4.35}$$

dove $\boldsymbol{F}$ rappresenta il vettore dei carichi nodali mentre $\boldsymbol{q}$ esprimono le condizioni al contorno. Nell'equazione $\boldsymbol{\tau}$ e $\boldsymbol{s}$ variano tra 0 e N (ordine di espansione), $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ variano tra $1\,e\,N_n$ (numero di nodi), $\boldsymbol{k}$ è il numero di strati del laminato.

La matrice $\boldsymbol{K}^{k\tau sij}$ è il nucleo di rigidezza fondamentale dell'elemento finito e può essere calcolata attraverso una integrazione numerica delle funzioni di forma nel piano e lungo lo spessore. Per il caso elettromeccanico la matrice $\boldsymbol{K}^{k\tau sij}$ ha dimensione (4×4) perchè nel PVD(u,Φ) ci sono 4 variabili (le 3 componenti di spostamento e il potenziale elettrico scalare):

$$\boldsymbol{K}^{k\tau sij} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} & \boldsymbol{K}_{13} & \boldsymbol{K}_{14} \\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22} & \boldsymbol{K}_{23} & \boldsymbol{K}_{24} \\ \boldsymbol{K}_{31} & \boldsymbol{K}_{32} & \boldsymbol{K}_{33} & \boldsymbol{K}_{34} \\ \boldsymbol{K}_{41} & \boldsymbol{K}_{42} & \boldsymbol{K}_{43} & \boldsymbol{K}_{44} \end{bmatrix}^{k\tau sij} \tag{4.36}$$

Separando i gradi di libertà meccanici $q_u^k = (q_{u_0}^k, q_{v_0}^k, q_{w_0}^k)^T$ da quelli elettrici $q_\Phi^k = (q_{\Phi_0}^k)^T$, è possibile riordinare la matrice di rigidezza (4.36) in una forma più concisa dove la parte puramente meccanica, la parte puramente elettrica e le componenti di accoppiamento sono poste in evidenza:

$$\boldsymbol{K}^{k\tau sij} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{uu} & \boldsymbol{K}_{u\Phi} \\ \boldsymbol{K}_{\Phi u} & \boldsymbol{K}_{\Phi\Phi} \end{bmatrix}^{k\tau sij} \tag{4.37}$$

Dove la parte meccanica $\boldsymbol{K}_{uu}$ ha dimensione (3×3), le parti di accoppiamento $\boldsymbol{K}_{u\Phi}$ e $\boldsymbol{K}_{\Phi u}$ hanno dimensione (3×1) e viceversa, la parte elettrica $\boldsymbol{K}_{\Phi\Phi}$ ha dimensione (1×1),

Per una scrittura più compatta dei nuclei, vengono definiti i seguenti integrali nel piano Ω^k con le nuove funzioni di forma:

$$\left(W_{m1\,n1}^k\,;\, W_{m1\,n2}^k\,;\, W_{m2\,n1}^k\,;\, W_{m2\,n2}^k\right) = \int_{\Omega_k} (N_{m1}N_{n1}\,;\, N_{m1}N_{n2}\,;\, N_{m2}N_{n1}\,;\, N_{m2}N_{n2})\, dz \tag{4.38}$$

$$\left(W_{m1\,n3}^k\,;\, W_{m3\,n1}^k\,;\, W_{m3\,n3}^k\,;\, W_{m2\,n3}^k\,;\, W_{m3\,n2}^k\right) = \int_{\Omega_k} (N_{m1}N_{n3}\,;\, N_{m3}N_{n1}\,;\, N_{m3}N_{n3}\,;\, N_{m2}N_{n3}\,;\, N_{m3}N_{n2})\, dz \tag{4.39}$$

Sono definiti i seguenti integrali nel piano Ω^k tra le funzioni di forma nuove e quelle definite sui nodi di partenza:

$$\left(W^k_{m1\,j}\,;\,W^k_{m2\,j}\,;\,W^k_{m3\,j}\right) = \int\limits_{\Omega_k} \left(N_{m1}N_j\,;\,N_{m2}N_j\,;\,N_{m3}N_j\right) dz \tag{4.40}$$

$$\left(W^k_{i\,n1}\,;\,W^k_{i\,n2}\,;\,W^k_{i\,n3}\,;\,W^k_{i\,j}\right) = \int\limits_{\Omega_k} \left(N_iN_{n1}\,;\,N_iN_{n2}\,;\,N_iN_{n3}\,;\,N_iN_j\right) dz \tag{4.41}$$

$$\left(W^k_{m1\,j,\alpha}\,;\,W^k_{m1\,j,\beta}\,;\,W^k_{m2\,j,\alpha}\,;\,W^k_{m2\,j,\beta}\right) = \int\limits_{\Omega_k} \left(N_{m1}\frac{\partial N_j}{\partial\alpha}\,;\,N_{m1}\frac{\partial N_j}{\partial\beta}\,;\,N_{m2}\frac{\partial N_j}{\partial\alpha}\,;\,N_{m2}\frac{\partial N_j}{\partial\beta}\right) dz \tag{4.42}$$

$$\left(W^k_{i,\alpha\,n1}\,;\,W^k_{i,\beta\,n1}\,;\,W^k_{i,\alpha\,n2}\,;\,W^k_{i,\beta\,n2}\right) = \int\limits_{\Omega_k} \left(\frac{\partial N_i}{\partial\alpha}N_{n1}\,;\,\frac{\partial N_i}{\partial\beta}N_{n1}\,;\,\frac{\partial N_i}{\partial\alpha}N_{n2}\,;\,\frac{\partial N_i}{\partial\beta}N_{n2}\right) dz \tag{4.43}$$

Vengono definiti i seguenti integrali sul dominio dello spessore A^k:

$$\left(J^{k\tau s}, J^{k\tau s}_\alpha, J^{k\tau s}_\beta, J^{k\tau s}_{\frac{\alpha}{\beta}}, J^{k\tau s}_{\frac{\beta}{\alpha}}, J^{k\tau s}_{\alpha\beta}\right) = \int\limits_{A_k} F_\tau F_s \left(1, H^k_\alpha, H^k_\beta, \frac{H^k_\alpha}{H^k_\beta}, \frac{H^k_\beta}{H^k_\alpha}, H^k_\alpha H^k_\beta\right) dz \tag{4.44}$$

$$\left(J^{k\tau_z s}, J^{k\tau_z s}_\alpha, J^{k\tau_z s}_\beta, J^{k\tau_z s}_{\frac{\alpha}{\beta}}, J^{k\tau_z s}_{\frac{\beta}{\alpha}}, J^{k\tau_z s}_{\alpha\beta}\right) = \int\limits_{A_k} \frac{\partial F_\tau}{\partial z} F_s \left(1, H^k_\alpha, H^k_\beta, \frac{H^k_\alpha}{H^k_\beta}, \frac{H^k_\beta}{H^k_\alpha}, H^k_\alpha H^k_\beta\right) dz \tag{4.45}$$

$$\left(J^{k\tau s_z}, J^{k\tau s_z}_{\alpha}, J^{k\tau s_z}_{\beta}, J^{k\tau s_z}_{\frac{\alpha}{\beta}}, J^{k\tau s_z}_{\frac{\beta}{\alpha}}, J^{k\tau s_z}_{\alpha\beta}\right) = \int_{A_k} F_\tau \frac{\partial F_s}{\partial z}\left(1, H^k_\alpha, H^k_\beta, \frac{H^k_\alpha}{H^k_\beta}, \frac{H^k_\beta}{H^k_\alpha}, H^k_\alpha H^k_\beta\right) dz \tag{4.46}$$

$$\left(J^{k\tau_z s_z}, J^{k\tau_z s_z}_{\alpha}, J^{k\tau_z s_z}_{\beta}, J^{k\tau_z s_z}_{\frac{\alpha}{\beta}}, J^{k\tau_z s_z}_{\frac{\beta}{\alpha}}, J^{k\tau_z s_z}_{\alpha\beta}\right) = \int_{A_k} \frac{\partial F_\tau}{\partial z}\frac{\partial F_s}{\partial z}\left(1, H^k_\alpha, H^k_\beta, \frac{H^k_\alpha}{H^k_\beta}, \frac{H^k_\beta}{H^k_\alpha}, H^k_\alpha H^k_\beta\right) dz \tag{4.47}$$

4.4.1 Nuclei MITC per le strutture a guscio con carico elettromeccanico

Il nucleo fondamentale $K^{k\tau s}_{uu}$ di dimensioni (3×3) è :

$$\begin{aligned} K^{k\tau s}_{uu_{11}} &= Q^k_{55}\, N^{(m1)}_i N^{(n1)}_j\, W^k_{m1\,n1}\, J^{k\tau_z s_z}_{\alpha\beta} - \frac{Q^k_{55}}{R^k_\alpha}\, N^{(m1)}_i N^{(n1)}_j\, W^k_{m1\,n1}\, J^{k\tau_z s}_{\beta} - \frac{Q^k_{55}}{R^k_\alpha}\, N^{(m1)}_i N^{(n1)}_j\, W^k_{m1\,n1}\, J^{k\tau s_z}_{\beta} + \\ &+ Q^k_{66}\, N^{(m3)}_{i,\beta} N^{(n3)}_{j,\beta}\, W^k_{m3\,n3}\, J^{k\tau s}_{\frac{\alpha}{\beta}} + Q^k_{16}\, N^{(m1)}_{i,\alpha} N^{(n3)}_{j,\beta}\, W^k_{m1\,n3}\, J^{k\tau s} + Q^k_{16}\, N^{(m3)}_{i,\beta} N^{(n1)}_{j,\alpha}\, W^k_{m3\,n1}\, J^{k\tau s} + \\ &+ Q^k_{11}\, N^{(m1)}_{i,\alpha} N^{(n1)}_{j,\alpha}\, W^k_{m1\,n1}\, J^{k\tau s}_{\frac{\beta}{\alpha}} + \frac{Q^k_{55}}{\left(R^k_\alpha\right)^2}\, N^{(m1)}_i N^{(n1)}_j\, W^k_{m1\,n1}\, J^{k\tau s}_{\frac{\beta}{\alpha}} \end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned} K^{k\tau s}_{uu_{12}} &= Q^k_{45}\, N^{(m1)}_i N^{(n2)}_j\, W^k_{m1\,n2}\, J^{k\tau_z s_z}_{\alpha\beta} - \frac{Q^k_{45}}{R^k_\beta}\, N^{(m1)}_i N^{(n2)}_j\, W^k_{m1\,n2}\, J^{k\tau_z s}_{\alpha} - \frac{Q^k_{45}}{R^k_\alpha}\, N^{(m1)}_i N^{(n2)}_j\, W^k_{m1\,n2}\, J^{k\tau s_z}_{\beta} + \\ &+ Q^k_{26}\, N^{(m3)}_{i,\beta} N^{(n2)}_{j,\beta}\, W^k_{m3\,n2}\, J^{k\tau s}_{\frac{\alpha}{\beta}} + Q^k_{12}\, N^{(m1)}_{i,\alpha} N^{(n2)}_{j,\beta}\, W^k_{m1\,n2}\, J^{k\tau s} + Q^k_{66}\, N^{(m3)}_{i,\beta} N^{(n3)}_{j,\alpha}\, W^k_{m3\,n3}\, J^{k\tau s} + \\ &+ Q^k_{16}\, N^{(m1)}_{i,\alpha} N^{(n3)}_{j,\alpha}\, W^k_{m1\,n3}\, J^{k\tau s}_{\frac{\beta}{\alpha}} + \frac{Q^k_{45}}{R^k_\alpha R^k_\beta}\, N^{(m1)}_i N^{(n2)}_j\, W^k_{m1\,n2}\, J^{k\tau s} \end{aligned} \tag{4.49}$$

$$
\begin{aligned}
K_{uu_{13}}^{k\tau s} &= Q_{45}^{k}\, N_{i}^{(m1)} N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{m1\,n2}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} + Q_{55}^{k}\, N_{i}^{(m1)} N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{m1\,n1}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} + Q_{36}^{k}\, N_{i,\beta}^{(m3)}\, W_{m3\,j}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + \\
&+ Q_{13}^{k}\, N_{i,\alpha}^{(m1)}\, W_{m1\,j}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} - \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i}^{(m1)} N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{m1\,n2}^{k}\, J^{k\tau s} - \frac{Q_{55}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i}^{(m1)} N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{m1\,n1}^{k}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} + \\
&+ \frac{Q_{26}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i,\beta}^{(m3)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m3\,n2}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + \frac{Q_{16}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i,\beta}^{(m3)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m3\,n1}^{k}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{12}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i,\alpha}^{(m1)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m1\,n2}^{k}\, J^{k\tau s} + \\
&+ \frac{Q_{11}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i,\alpha}^{(m1)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m1\,n1}^{k}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s}
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{uu_{21}}^{k\tau s} &= Q_{45}^{k}\, N_{i}^{(m2)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J_{\alpha\beta}^{k\tau_z s_z} - \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} - \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + \\
&+ Q_{26}^{k}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j,\beta}^{(n3)}\, W_{m2\,n3}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + Q_{66}^{k}\, N_{i,\alpha}^{(m3)} N_{j,\beta}^{(n3)}\, W_{m3\,n3}^{k}\, J^{k\tau s} + Q_{12}^{k}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J^{k\tau s} + \\
&+ Q_{16}^{k}\, N_{i,\alpha}^{(m3)} N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{m3\,n1}^{k}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} + \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\alpha}^{k}\, R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J^{k\tau s}
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{uu_{22}}^{k\tau s} &= Q_{44}^{k}\, N_{i}^{(m2)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\alpha\beta}^{k\tau_z s_z} - \frac{Q_{44}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} - \frac{Q_{44}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + \\
&+ Q_{22}^{k}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + Q_{26}^{k}\, N_{i,\alpha}^{(m3)} N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{m3\,n2}^{k}\, J^{k\tau s} + Q_{26}^{k}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j,\alpha}^{(n3)}\, W_{m2\,n3}^{k}\, J^{k\tau s} + \\
&+ Q_{66}^{k}\, N_{i,\alpha}^{(m3)} N_{j,\alpha}^{(n3)}\, W_{m3\,n3}^{k}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} + \frac{Q_{44}^{k}}{\left(R_{\beta}^{k}\right)^{2}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s}
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{uu_{23}}^{k\tau s} &= Q_{44}^{k}\, N_{i}^{(m2)} N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} + Q_{45}^{k}\, N_{i}^{(m2)} N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} + Q_{23}^{k}\, N_{i,\beta}^{(m2)}\, W_{m2\,j}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + \\
&+ Q_{36}^{k}\, N_{i,\alpha}^{(m3)}\, W_{m3\,j}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} - \frac{Q_{44}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} - \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J^{k\tau s} + \\
&+ \frac{Q_{22}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + \frac{Q_{12}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{26}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i,\alpha}^{(m3)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m3\,n2}^{k}\, J^{k\tau s} + \\
&+ \frac{Q_{16}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i,\alpha}^{(m3)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m3\,n1}^{k}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s}
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{uu_{31}}^{k\tau s} &= Q_{36}^{k}\, N_{j,\beta}^{(n3)}\, W_{i\,n3}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} + Q_{13}^{k}\, N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{i\,n1}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} + Q_{45}^{k}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + \\
&+ Q_{55}^{k}\, N_{i,\alpha}^{(m1)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m1\,n1}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} + \frac{Q_{26}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j,\beta}^{(n3)}\, W_{m2\,n3}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + \frac{Q_{16}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i}^{(m1)} N_{j,\beta}^{(n3)}\, W_{m1\,n3}^{k}\, J^{k\tau s} + \\
&+ \frac{Q_{12}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{11}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i}^{(m1)} N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{m1\,n1}^{k}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} - \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J^{k\tau s} - \\
&- \frac{Q_{55}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i,\alpha}^{(m1)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m1\,n1}^{k}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s}
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{uu_{32}}^{k\tau s} &= Q_{23}^{k}\, N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{i\,n2}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} + Q_{36}^{k}\, N_{j,\alpha}^{(n3)}\, W_{i\,n3}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} + Q_{44}^{k}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + \\
&+ Q_{45}^{k}\, N_{i,\alpha}^{(m1)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m1\,n2}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} + \frac{Q_{22}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + \frac{Q_{12}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i}^{(m1)} N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{m1\,n2}^{k}\, J^{k\tau s} + \\
&+ \frac{Q_{26}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j,\alpha}^{(n3)}\, W_{m2\,n3}^{k}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{16}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i}^{(m1)} N_{j,\alpha}^{(n3)}\, W_{m1\,n3}^{k}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} - \frac{Q_{44}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} - \\
&- \frac{Q_{45}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i,\alpha}^{(m1)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m1\,n2}^{k}\, J^{k\tau s}
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{uu_{33}}^{k\tau s} &= Q_{33}^{k}\, W_{i\,j}^{k}\, J_{\alpha\beta}^{k\tau_z s_z} + \frac{Q_{23}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{j}^{(n2)}\, W_{i\,n2}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau_z s} + \frac{Q_{13}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{j}^{(n1)}\, W_{i\,n1}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau_z s} + \\
&+ \frac{Q_{23}^{k}}{R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)}\, W_{m2\,j}^{k}\, J_{\alpha}^{k\tau s_z} + \frac{Q_{13}^{k}}{R_{\alpha}^{k}}\, N_{i}^{(m1)}\, W_{m1\,j}^{k}\, J_{\beta}^{k\tau s_z} + Q_{44}^{k}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + \\
&+ Q_{45}^{k}\, N_{i,\alpha}^{(m1)} N_{j,\beta}^{(n2)}\, W_{m1\,n2}^{k}\, J^{k\tau s} + Q_{45}^{k}\, N_{i,\beta}^{(m2)} N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J^{k\tau s} + Q_{55}^{k}\, N_{i,\alpha}^{(m1)} N_{j,\alpha}^{(n1)}\, W_{m1\,n1}^{k}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s} + \\
&+ \frac{Q_{12}^{k}}{R_{\alpha}^{k}\, R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m1)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m1\,n2}^{k}\, J^{k\tau s} + \frac{Q_{12}^{k}}{R_{\alpha}^{k}\, R_{\beta}^{k}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m2\,n1}^{k}\, J^{k\tau s} + \\
&+ \frac{Q_{22}^{k}}{\left(R_{\beta}^{k}\right)^{2}}\, N_{i}^{(m2)} N_{j}^{(n2)}\, W_{m2\,n2}^{k}\, J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s} + \frac{Q_{11}^{k}}{\left(R_{\alpha}^{k}\right)^{2}}\, N_{i}^{(m1)} N_{j}^{(n1)}\, W_{m1\,n1}^{k}\, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s}
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

Il nucleo fondamentale $K^{k\tau s}_{u\Phi}$ di dimensioni (3×1), perchè Φ^k è uno scalare, è :

$$\begin{aligned} K^{k\tau s}_{u\Phi_{14}} &= e^k_{25}\, N^{(m1)}_i\, W^k_{m1\,j,_\beta}\, J^{k\tau_z s}_\alpha + e^k_{15}\, N^{(m1)}_i\, W^k_{m1\,j,_\alpha}\, J^{k\tau_z s}_\beta + e^k_{36}\, N^{(m3)}_{i,\beta}\, W^k_{m3\,j}\, J^{k\tau s_z}_\alpha + \\ &+ e^k_{31}\, N^{(m1)}_{i,\alpha}\, W^k_{m1\,j}\, J^{k\tau s_z}_\beta - \frac{e^k_{25}}{R^k_\alpha}\, N^{(m1)}_i\, W^k_{m1\,j,_\beta}\, J^{k\tau s} - \frac{e^k_{15}}{R^k_\alpha}\, N^{(m1)}_i\, W^k_{m1\,j,_\alpha}\, J^{k\tau s}_{\frac{\beta}{\alpha}} \end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned} K^{k\tau s}_{u\Phi_{24}} &= e^k_{24}\, N^{(m2)}_i\, W^k_{m2\,j,_\beta}\, J^{k\tau_z s}_\alpha + e^k_{14}\, N^{(m2)}_i\, W^k_{m2\,j,_\alpha}\, J^{k\tau_z s}_\beta + e^k_{32}\, N^{(m2)}_{i,\beta}\, W^k_{m2\,j}\, J^{k\tau s_z}_\alpha + \\ &+ e^k_{36}\, N^{(m3)}_{i,\alpha}\, W^k_{m3\,j}\, J^{k\tau s_z}_\beta - \frac{e^k_{24}}{R^k_\beta}\, N^{(m2)}_i\, W^k_{m2\,j,_\beta}\, J^{k\tau s}_{\frac{\alpha}{\beta}} - \frac{e^k_{14}}{R^k_\beta}\, N^{(m2)}_i\, W^k_{m2\,j,_\alpha}\, J^{k\tau s} \end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned} K^{k\tau s}_{u\Phi_{34}} &= e^k_{33}\, W^k_{i\,j}\, J^{k\tau_z s_z}_{\alpha\beta} + \frac{e^k_{32}}{R^k_\beta}\, N^{(m2)}_i\, W^k_{m2\,j}\, J^{k\tau s_z}_\alpha + \frac{e^k_{31}}{R^k_\alpha}\, N^{(m1)}_i\, W^k_{m1\,j}\, J^{k\tau s_z}_\beta + \\ &+ e^k_{24}\, N^{(m2)}_{i,\beta}\, W^k_{m2\,j,_\beta}\, J^{k\tau s}_{\frac{\alpha}{\beta}} + e^k_{25}\, N^{(m1)}_{i,\alpha}\, W^k_{m1\,j,_\beta}\, J^{k\tau s} + e^k_{14}\, N^{(m2)}_{i,\beta}\, W^k_{m2\,j,_\alpha}\, J^{k\tau s} + \\ &+ e^k_{15}\, N^{(m1)}_{i,\alpha}\, W^k_{m1\,j,_\alpha}\, J^{k\tau s}_{\frac{\beta}{\alpha}} \end{aligned} \tag{4.59}$$

Il nucleo fondamentale $K^{k\tau s}_{\Phi u}$ di dimensioni (1×3) è :

$$\begin{aligned} K^{k\tau s}_{\Phi u_{41}} &= e^k_{36}\, N^{(n3)}_{j,\beta}\, W^k_{i\,n3}\, J^{k\tau_z s}_\alpha + e^k_{31}\, N^{(n1)}_{j,\alpha}\, W^k_{i\,n1}\, J^{k\tau_z s}_\beta + e^k_{25}\, N^{(n1)}_j\, W^k_{i,_\beta\,n1}\, J^{k\tau s_z}_\alpha + \\ &+ e^k_{15}\, N^{(n1)}_j\, W^k_{i,_\alpha\,n1}\, J^{k\tau s_z}_\beta - \frac{e^k_{25}}{R^k_\alpha}\, N^{(n1)}_j\, W^k_{i,_\beta\,n1}\, J^{k\tau s} - \frac{e^k_{15}}{R^k_\alpha}\, N^{(n1)}_j\, W^k_{i,_\alpha\,n1}\, J^{k\tau s}_{\frac{\beta}{\alpha}} \end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned} K^{k\tau s}_{\Phi u_{42}} &= e^k_{32}\, N^{(n2)}_{j,\beta}\, W^k_{i\,n2}\, J^{k\tau_z s}_\alpha + e^k_{36}\, N^{(n3)}_{j,\alpha}\, W^k_{i\,n3}\, J^{k\tau_z s}_\beta + e^k_{24}\, N^{(n2)}_j\, W^k_{i,_\beta\,n2}\, J^{k\tau s_z}_\alpha + \\ &+ e^k_{14}\, N^{(n2)}_j\, W^k_{i,_\alpha\,n2}\, J^{k\tau s_z}_\beta - \frac{e^k_{24}}{R^k_\beta}\, N^{(n2)}_j\, W^k_{i,_\beta\,n2}\, J^{k\tau s}_{\frac{\alpha}{\beta}} - \frac{e^k_{14}}{R^k_\beta}\, N^{(n2)}_j\, W^k_{i,_\alpha\,n2}\, J^{k\tau s} \end{aligned} \tag{4.61}$$

$$
\begin{aligned}
K^{k\tau s}_{\Phi u_{43}} = {} & e^k_{33}\, W^k_{i\,j}\, J^{k\tau_z s_z}_{\alpha\beta} + \frac{e^k_{32}}{R^k_\beta}\, N^{(n2)}_j\, W^k_{i\,n2}\, J^{k\tau_z s}_\alpha + \frac{e^k_{31}}{R^k_\alpha}\, N^{(n1)}_j\, W^k_{i\,n1}\, J^{k\tau_z s}_\beta + \\
& + e^k_{24}\, N^{(n2)}_{j,\beta}\, W^k_{i,\beta\,n2}\, J^{k\tau s}_{\frac{\alpha}{\beta}} + e^k_{14}\, N^{(n2)}_{j,\beta}\, W^k_{i,\alpha\,n2}\, J^{k\tau s} + e^k_{25}\, N^{(n1)}_{j,\alpha}\, W^k_{i,\beta\,n1}\, J^{k\tau s} + \\
& + e^k_{15}\, N^{(n1)}_{j,\alpha}\, W^k_{i,\alpha\,n1}\, J^{k\tau s}_{\frac{\beta}{\alpha}}
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

Il nucleo fondamentale $K^{k\tau s}_{\Phi\Phi}$ di dimensioni (1×1) è :

$$
\begin{aligned}
K^{k\tau s}_{\Phi\Phi_{44}} = {} & -\varepsilon^k_{33}\, W^k_{i\,j}\, J^{k\tau_z s_z}_{\alpha\beta} - \varepsilon^k_{22}\, W^k_{i,\beta\,j,\beta}\, J^{k\tau s}_{\frac{\alpha}{\beta}} - \varepsilon^k_{12}\, W^k_{i,\alpha\,j,\beta}\, J^{k\tau s} - \varepsilon^k_{12}\, W^k_{i,\beta\,j,\alpha}\, J^{k\tau s} - \\
& - \varepsilon^k_{11}\, W^k_{i,\alpha\,j,\alpha}\, J^{k\tau s}_{\frac{\beta}{\alpha}}
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

Capitolo 5

Risultati per carichi puramente meccanici

In questo capitolo viene studiata una struttura multistrato *shell* con doppia curvatura soggetta a carichi puramente meccanici. Nella prima parte è stato preso in considerazione un caso già presente in letteratura per validare l'elemento finito ricavato nei capitoli precedenti. E' stato condotto inizialmente uno studio di convergenza della soluzione numerica al variare della *mesh* adottata. Successivamente sono state ricavate per tutti i casi le variabili incognite primarie, ovvero gli spostamenti, e infine, tramite la risoluzione delle equazioni costitutive, le tensioni. Nella seconda parte è stata studiata la stessa struttura con condizioni al contorno diverse, non presenti in letteratura, che non possono essere risolte tramite via analitica ma solo con la formulazione agli elementi finiti. Sono state usate varie teorie contenute nella CUF per risolvere i casi proposti e le soluzioni quasi-3D sono state confrontate tra loro. Si propongono i risultati per tutti questi casi sia in forma grafica che tabellare.

5.1 Pannello shell sotto carichi puramente meccanici

I risultati qui di seguito presentati si riferiscono ad una struttura *guscio cross-ply* quadrata di tipo sferico semplicemente appoggiata sui quattro lati. Sono stati analizzati i seguenti casi:

- Laminazione simmetrica $[0°/90°/0°]$ con numero di strati $N = 3$
- Laminazione asimmetrica $[0°/90°/0°/90°]$ con numero di strati $N = 4$
- Laminazione simmetrica $[0°/90°/0°/90°/0°]$ con numero di strati $N = 5$

Per ogni caso sono stati valutati rapporti $R/a = 1, 2, 5$.
Il carico meccanico applicato al *top* è di tipo bi-sinusoidale $p^+ = \hat{p}_z^+ \, sin(\pi\alpha/a) sin(\pi\beta/a)$.
In tutti i problemi sono state usate le seguenti proprietà del materiale e i seguenti carichi meccanici:

Tabella 5.1: Dati fisici del *guscio sferico*.

Guscio sferico		
Young's modulus	E_{11}/E_{22}	25
Shear modulus	$G_{12}/E_{22} = G_{13}/E_{22}$	0.5
Shear modulus	G_{23}/E_{22}	0.2
Poisson's ratio	$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23}$	0.25
load amplitude	$\hat{p}_z^+$	1
load amplitude	$\hat{p}_z^-$	0
length	a	1
half-wave numbers	m, n	1,1

Nelle tabelle seguenti per le variabili incognite sono stati usati i pedici $(1\,2\,3)$ al posto di $(\alpha\,\beta\,z)$.
I risultati sono stati adimensionati nel modo seguente:

$$\bar{w} = w(a/2, a/2)\frac{100\,E_{22}\,h^3}{a^4\,\hat{p}_z^+} \quad ; \quad \bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11}(a/2, a/2)\frac{h^2}{a^2\,\hat{p}_z^+}$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \sigma_{22}(a/2, a/2)\frac{h^2}{a^2\,\hat{p}_z^+} \quad ; \quad \bar{\sigma}_{12} = \sigma_{12}(0, 0)\frac{h^2}{a^2\,\hat{p}_z^+}$$

$$\bar{\sigma}_{13} = \sigma_{13}(0, a/2)\frac{h}{a\,\hat{p}_z^+} \quad ; \quad \bar{\sigma}_{23} = \sigma_{23}(a/2, 0)\frac{h}{a\,\hat{p}_z^+}$$

$$\bar{\sigma}_{33} = \sigma_{33}(a/2, a/2)\frac{1}{\hat{p}_z^+}$$

5.1.1 Laminazione simmetrica $[0°/90°/0°]$, numero strati N = 3

E' stato fatto uno studio della convergenza della soluzione al variare della *mesh* sia per lo spostamento verticale che per le tensioni. Come si può notare dalla tabella [5.2] e [5.3] si ottiene una buona convergenza della soluzione numerica per tutte le teorie impiegate con una *mesh* (9×9).
Nei grafici dello spostamento verticale $\bar{\boldsymbol{w}}$ si nota che, a differenza della teoria classica che predirebbe uno spostamento costante, gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono dei cambiamenti di pendenza pronunciati e non lineari per i gusci con bassi rapporti di curvatura $(R/a = 1)$, mentre per i gusci con grandi rapporti di curvatura $(R/a = 5)$ sono lineari. Per i gusci sottili invece $(a/h = 100)$ l'andamento è quasi costante lungo tutto lo spessore.
Per quanto riguarda le tensioni di taglio $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ si evince che, a differenza della teoria classica che predirebbe una tensione costante a tratti, gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità. Sia per i gusci con bassi rapporti di curvatura $(R/a = 1)$ che per i gusci con grandi rapporti di curvatura $(R/a = 5)$ sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia. Solo per i gusci sottili $(a/h = 100)$ si riesce ad ottenere un profilo di tensione quasi continuo con una teoria di tipo zig-zag. Si evince per tutti i casi l'impossibilità di descrivere correttamente il profilo di tensione tramite teorie classiche e teorie *equivalent single layer*.
Anche per i grafici delle tensioni trasversali $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ si nota che ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità. Sia per i gusci con bassi rapporti di curvatura $(R/a = 1)$ che per i gusci con grandi rapporti di curvatura $(R/a = 5)$ sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia. Per i gusci sottili $(a/h = 100)$ si vede che le teorie *equivalent single layer* non riescono affatto ad ottenere la continuità all'interfaccia e nemmeno il corretto profilo di tensione.

Tabella 5.2: Spostamento trasversale $\bar{\boldsymbol{w}}$ valutato lungo lo spessore nel punto centrale $(z = 0)$. *Deep shell* con $\boldsymbol{(R/a) = 1}$.

	$a/h = 5$				$a/h = 10$			
$HSDT_1$ [55]	1.208				0.3761			
Mesh	3×3	5×5	7×7	9×9	3×3	5×5	7×7	9×9
LD4	1.2092	1.2082	1.2081	1.2080	0.3772	0.3767	0.3766	0.3766
LD1	1.1849	1.1840	1.1839	1.1839	0.3737	0.3732	0.3732	0.3732
EDZ3	1.2026	1.2016	1.2015	1.2015	0.3766	0.3760	0.3760	0.3760
ED4	1.1666	1.1657	1.1656	1.1656	0.3698	0.3693	0.3692	0.3692
ED2	1.0347	1.0342	1.0341	1.0341	0.3508	0.3504	0.3504	0.3504

Tabella 5.3: Tensione principale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{11}}$ valutata lungo lo spessore nei punti esterni ($z = \pm h/2$). *Deep shell* con $\boldsymbol{(R/a) = 1}$.

	$a/h = 5$				$a/h = 10$			
$HSDT_1$ [55]		... -0.4699				... ...		
Mesh	3×3	5×5	7×7	9×9	3×3	5×5	7×7	9×9
LD4	0.5065 -0.4886	0.5193 -0.5002	0.5231 -0.5039	0.5247 -0.5055	0.2841 -0.2277	0.2914 -0.2326	0.2936 -0.2343	0.2946 -0.2350
LD1	0.4663 -0.4425	0.4787 -0.4531	0.4823 -0.4564	0.4838 -0.4579	0.2774 -0.2227	0.2848 -0.2276	0.2870 -0.2293	0.2879 -0.2300
EDZ3	0.5043 -0.4873	0.5174 -0.4989	0.5212 -0.5026	0.5229 -0.5042	0.2837 -0.2281	0.2910 -0.2330	0.2933 -0.2347	0.2942 -0.2354
ED4	0.5056 -0.4970	0.5187 -0.5090	0.5226 -0.5128	0.5242 -0.5144	0.2877 -0.2341	0.2952 -0.2393	0.2974 -0.2410	0.2984 -0.2417
ED2	0.3895 -0.3344	0.4001 -0.3427	0.4031 -0.3453	0.4044 -0.3464	0.2738 -0.2230	0.2812 -0.2282	0.2834 -0.2299	0.2843 -0.2306

Tabella 5.4: Spostamento trasversale $\bar{\boldsymbol{w}}$ valutato lungo lo spessore nel punto centrale ($z = 0$). Laminazione simmetrica con numero di strati N = 3. *Mesh* (9×9).

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
Elast. [56]	...	...	...	1.482	0.6087	...	1.549	0.7325	...
$HSDT_1$ [55]	1.208	0.3761	...	1.482	0.6090	...	1.546	0.7340	...
$HSDT_2$ [57]	1.079	0.3475	...	1.422	0.5877	...	1.534	0.7287	...
$HSDT_3$ [56]	...	...	...	1.420	0.5840	...	...	...	...
$HSDT_4$ [56]	...	...	...	...	...	...	1.461	0.6905	...
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	1.2081	0.3767	0.0054	1.4824	0.6087	0.0208	1.5494	0.7325	0.1036
LD1	1.1839	0.3732	0.0054	1.4413	0.5990	0.0208	1.5019	0.7179	0.1036
EDZ3	1.2015	0.3760	0.0054	1.4772	0.6081	0.0208	1.5452	0.7322	0.1036
ED4	1.1656	0.3693	0.0054	1.4038	0.5858	0.0208	1.4564	0.6974	0.1036
ED2	1.0342	0.3504	0.0054	1.1776	0.5315	0.0208	1.1961	0.6174	0.1036
FSDT	1.0491	0.3507	0.0054	1.1968	0.5326	0.0208	1.2129	0.6191	0.1036
CLT	0.5148	0.2947	0.0054	0.4748	0.3934	0.0208	0.4487	0.4295	0.1034

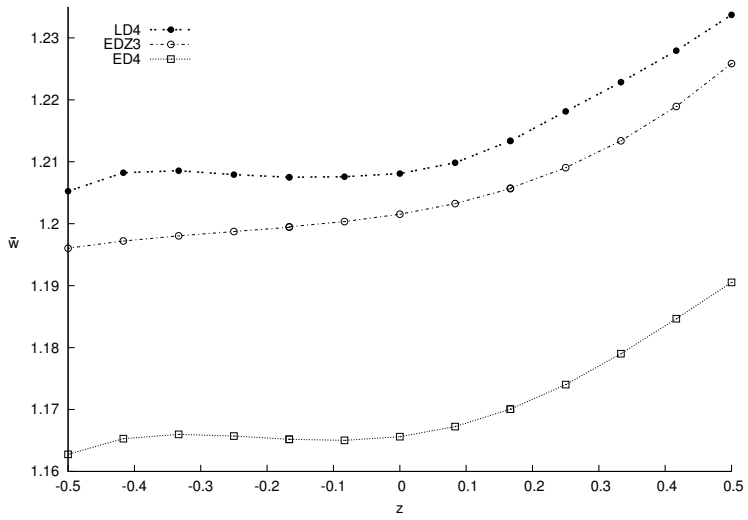

Figura 5.1: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

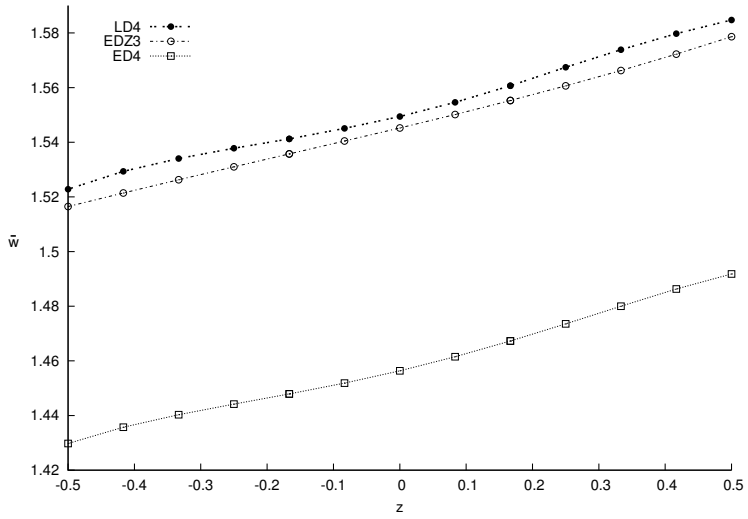

Figura 5.2: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

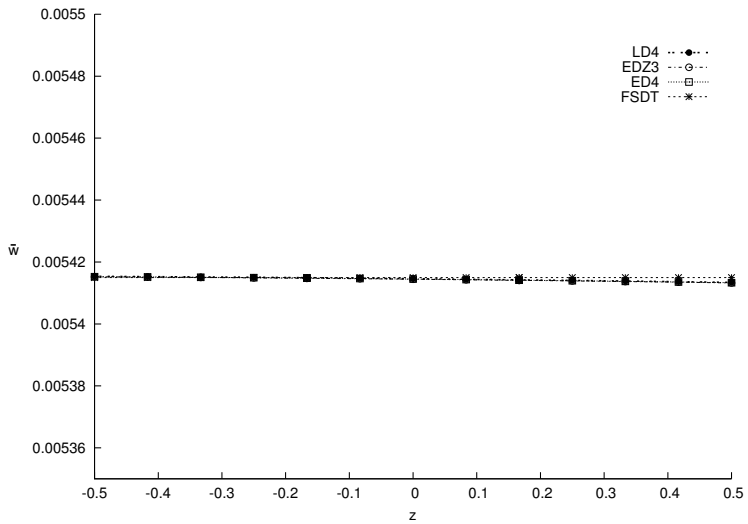

Figura 5.3: Spostamento $\bar{w}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

Tabella 5.5: Tensione principale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{11}}$ valutata lungo lo spessore nei punti esterni ($z = \pm h/2$). Laminazione simmetrica con numero di strati N = 3. $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
$HSDT_1$ [55]	... -0.4699	... ...	... ...	... -0.6706	... ...	... ...	... -0.7399	... ...	... ...
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	0.5248 -0.5055	0.2946 -0.2351	0.0132 0.0012	0.6791 -0.6706	0.4855 -0.4411	0.0388 -0.0112	0.7230 -0.7092	0.5801 -0.5588	0.1549 -0.0999
LD1	0.4838 -0.4579	0.2880 -0.2300	0.0132 0.0012	0.6202 -0.6079	0.4719 -0.4291	0.0389 -0.0112	0.6569 -0.6432	0.5618 -0.5415	0.1552 -0.1001
EDZ3	0.5229 -0.5042	0.2943 -0.2355	0.0132 0.0012	0.6775 -0.6692	0.4854 -0.4415	0.0388 -0.0112	0.7218 -0.7080	0.5803 -0.5593	0.1549 -0.0999
ED4	0.5243 -0.5144	0.2984 -0.2418	0.0132 0.0012	0.6693 -0.6661	0.4846 -0.4433	0.0388 -0.0112	0.7089 -0.6972	0.5739 -0.5543	0.1550 -0.0999
ED2	0.4044 -0.3464	0.2844 -0.2306	0.0132 0.0012	0.4783 -0.4446	0.4421 -0.4048	0.0388 -0.0112	0.4890 -0.4644	0.5111 -0.4938	0.1550 -0.1000
FSDT	0.3885 -0.3592	0.2851 -0.2293	0.0132 0.0012	0.4682 -0.4569	0.4437 -0.4037	0.0389 -0.0112	0.4809 -0.4769	0.5124 -0.4941	0.1551 -0.1000
CLT	0.5297 -0.6317	0.3450 -0.3149	0.0133 0.0012	0.5498 -0.6031	0.4856 -0.4681	0.0390 -0.0114	0.5451 -0.5659	0.5354 -0.5281	0.1555 -0.1005

Tabella 5.6: Tensione principale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{22}}$ valutata lungo lo spessore nei punti esterni ($z = \pm h/2$). Laminazione simmetrica con numero di strati N = 3. $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	0.0645	0.0246	0.0009	0.0772	0.0374	0.0024	0.0792	0.0430	0.0087
	-0.0412	-0.0141	0.0003	-0.0601	-0.0287	-0.0001	-0.0664	-0.0377	-0.0040
LD1	0.0612	0.0239	0.0009	0.0742	0.0369	0.0025	0.0768	0.0430	0.0090
	-0.0428	-0.0152	0.0003	-0.0604	-0.0299	-0.0001	-0.0654	-0.0384	-0.0042
EDZ3	0.0645	0.0247	0.0009	0.0780	0.0377	0.0024	0.0805	0.0435	0.0087
	-0.0444	-0.0147	0.0003	-0.0627	-0.0294	-0.0001	-0.0684	-0.0383	-0.0040
ED4	0.0623	0.0242	0.0009	0.0740	0.0363	0.0024	0.0757	0.0414	0.0087
	-0.0416	-0.0141	0.0003	-0.0584	-0.0280	-0.0001	-0.0636	-0.0363	-0.0040
ED2	0.0523	0.0220	0.0009	0.0592	0.0319	0.0024	0.0599	0.0361	0.0087
	-0.0362	-0.0144	0.0003	-0.0468	-0.0261	-0.0001	-0.0490	-0.0322	-0.0040
FSDT	0.0412	0.0199	0.0009	0.0496	0.0301	0.0024	0.0508	0.0341	0.0087
	-0.0382	-0.0139	0.0003	-0.0482	-0.0256	-0.0001	-0.0503	-0.0320	-0.0040
CLT	0.0284	0.0187	0.0009	0.0282	0.0252	0.0024	0.0274	0.0270	0.0087
	-0.0291	-0.0139	0.0003	-0.0288	-0.0221	-0.0001	-0.0276	-0.0257	-0.0040

Tabella 5.7: Tensione principale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{12}}$ valutata lungo lo spessore nei punti esterni ($z = \pm h/2$). Laminazione simmetrica con numero di strati N = 3. $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	0.0217	0.0209	0.0048	-0.0076	0.0051	0.0087	-0.0301	-0.0147	0.0143
	0.0970	0.0512	0.0054	0.0802	0.0531	0.0108	0.0604	0.0428	0.0247
LD1	0.0221	0.0208	0.0048	-0.0064	0.0052	0.0087	-0.0280	-0.0142	0.0143
	0.0938	0.0507	0.0054	0.0767	0.0521	0.0108	0.0574	0.0417	0.0247
EDZ3	0.0220	0.0209	0.0048	-0.0073	0.0052	0.0087	-0.0299	-0.0146	0.0143
	0.0965	0.0512	0.0054	0.0799	0.0531	0.0108	0.0602	0.0428	0.0247
ED4	0.0206	0.0203	0.0048	-0.0078	0.0046	0.0087	-0.0290	-0.0144	0.0143
	0.0944	0.0505	0.0054	0.0767	0.0515	0.0108	0.0576	0.0412	0.0247
ED2	0.0202	0.0193	0.0048	-0.0039	0.0042	0.0087	-0.0208	-0.0127	0.0143
	0.0802	0.0478	0.0054	0.0607	0.0467	0.0108	0.0439	0.0364	0.0247
FSDT	0.0217	0.0196	0.0048	-0.0033	0.0044	0.0087	-0.0211	-0.0127	0.0143
	0.0844	0.0482	0.0054	0.0636	0.0471	0.0108	0.0455	0.0366	0.0247
CLT	0.0013	0.0138	0.0048	-0.0113	-0.0007	0.0087	-0.0178	-0.0133	0.0143
	0.0537	0.0435	0.0054	0.0367	0.0390	0.0108	0.0274	0.0300	0.0247

Tabella 5.8: Tensione principale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ valutata lungo lo spessore nel punto ($z = 0$). Laminazione simmetrica con numero di strati N = 3. $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	0.2108	0.1634	0.0045	0.2771	0.2849	0.0186	0.2946	0.3499	0.0947
LD1	0.2138	0.1653	0.0045	0.2791	0.2863	0.0186	0.2958	0.3503	0.0944
EDZ3	0.2112	0.1649	0.0045	0.2787	0.2881	0.0188	0.2966	0.3541	0.0959
ED4	0.1680	0.1233	0.0032	0.2175	0.2114	0.0132	0.2296	0.2570	0.0674
ED2	0.1032	0.0697	0.0016	0.1266	0.1145	0.0067	0.1307	0.1358	0.0342
FSDT	0.1030	0.0696	0.0016	0.1270	0.1141	0.0067	0.1314	0.1354	0.0340

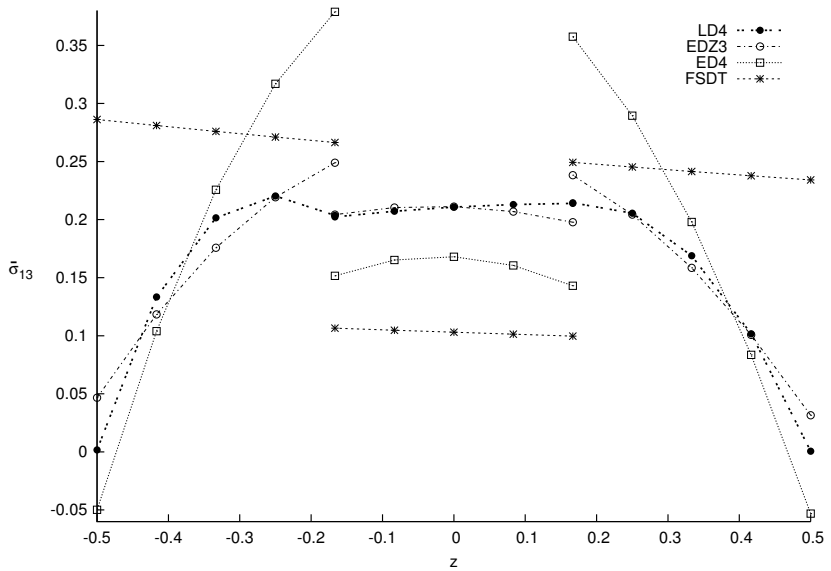

Figura 5.4: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

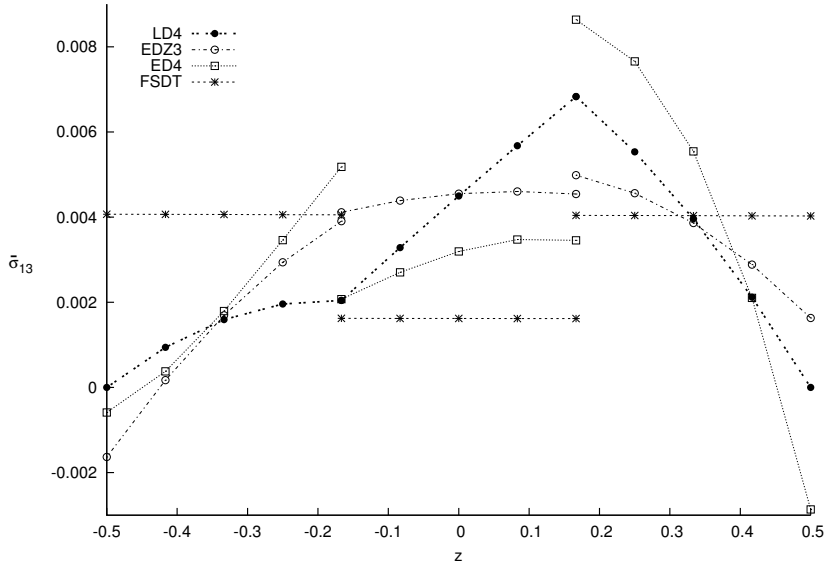

Figura 5.5: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

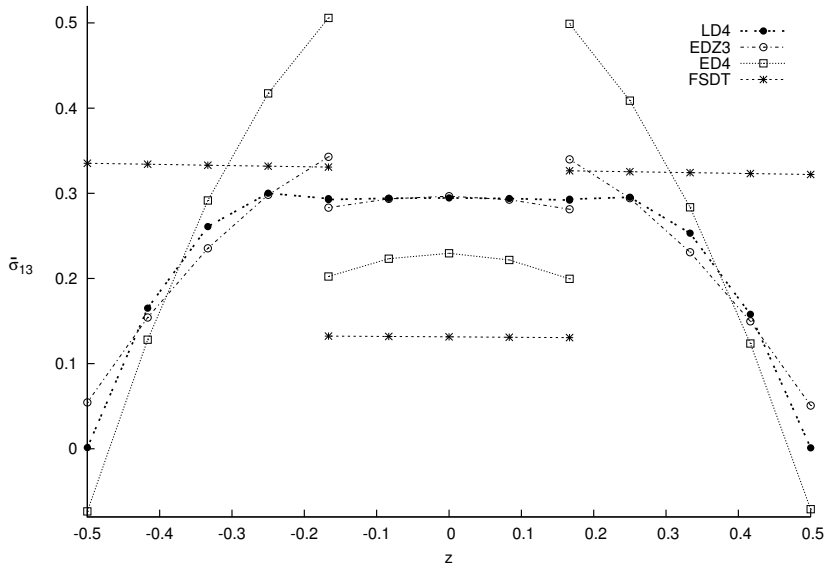

Figura 5.6: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

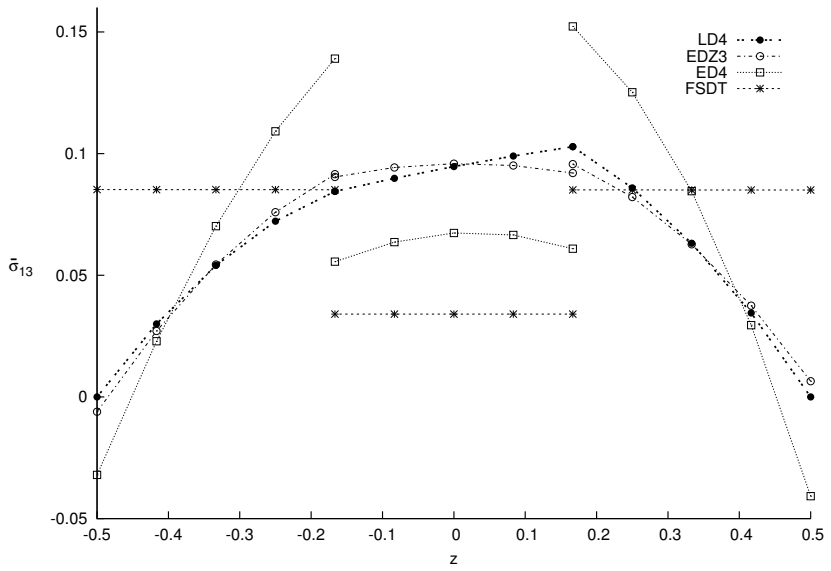

Figura 5.7: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

Tabella 5.9: Tensione principale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{23}}$ valutata lungo lo spessore nel punto ($z = 0$). Laminazione simmetrica con numero di strati N = 3. $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	0.1392	0.0560	0.0010	0.1843	0.0979	0.0039	0.1963	0.1203	0.0199
LD1	0.1111	0.0447	0.0008	0.1455	0.0773	0.0032	0.1544	0.0945	0.0160
EDZ3	0.1171	0.0471	0.0008	0.1547	0.0821	0.0033	0.1648	0.1008	0.0168
ED4	0.1205	0.0493	0.0009	0.1547	0.0835	0.0035	0.1631	0.1011	0.0176
ED2	0.0898	0.0390	0.0007	0.1084	0.0628	0.0028	0.1117	0.0742	0.0143
FSDT	0.0863	0.0375	0.0007	0.1059	0.0613	0.0028	0.1095	0.0726	0.0141

Tabella 5.10: Tensione principale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ valutata lungo lo spessore nel punto ($z = 0$). Laminazione simmetrica con numero di strati N = 3. $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	0.1417	-0.0652	0.3476	0.2464	-0.0120	0.1765	0.3886	0.2458	-0.1625
LD1	0.1730	-0.0422	0.3525	0.2691	0.0118	0.1867	0.3982	0.2584	-0.1415
EDZ3	0.1698	-0.0531	0.3472	0.2644	-0.0019	0.1758	0.3963	0.2507	-0.1641
ED4	0.1381	-0.0794	0.3961	0.2505	-0.0136	0.2700	0.3917	0.2480	0.0243
ED2	0.2172	0.0863	0.5108	0.3201	0.1528	0.5015	0.4223	0.3337	0.4922

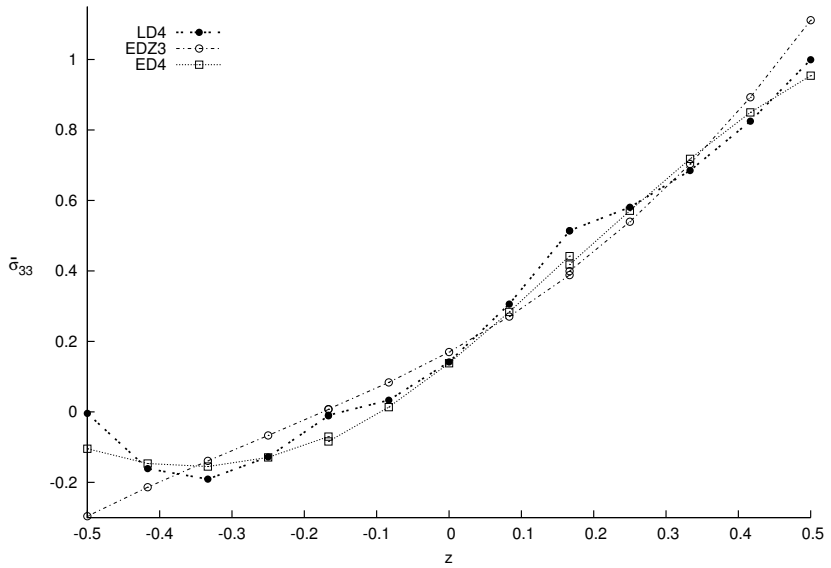

Figura 5.8: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

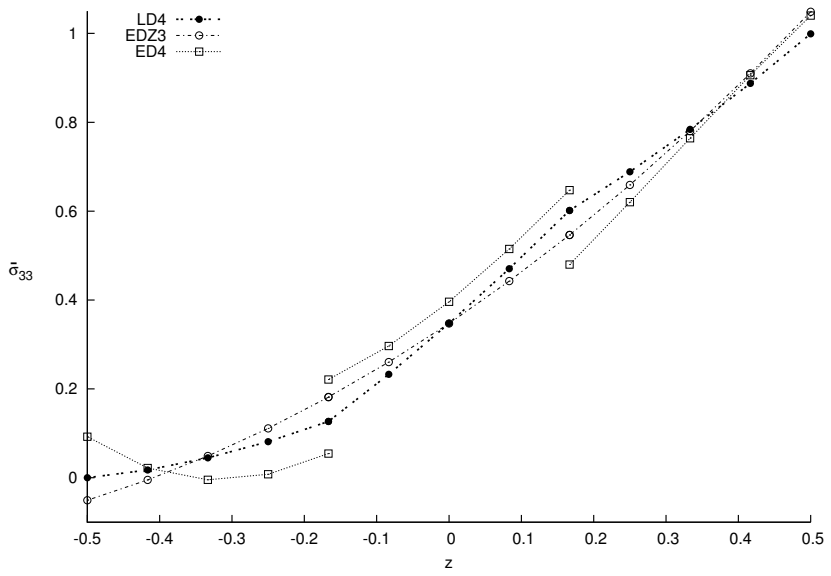

Figura 5.9: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

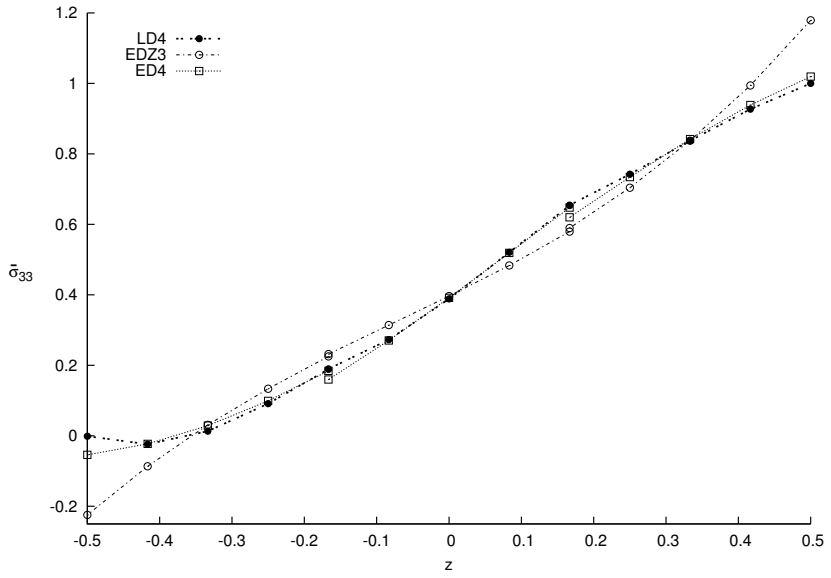

Figura 5.10: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

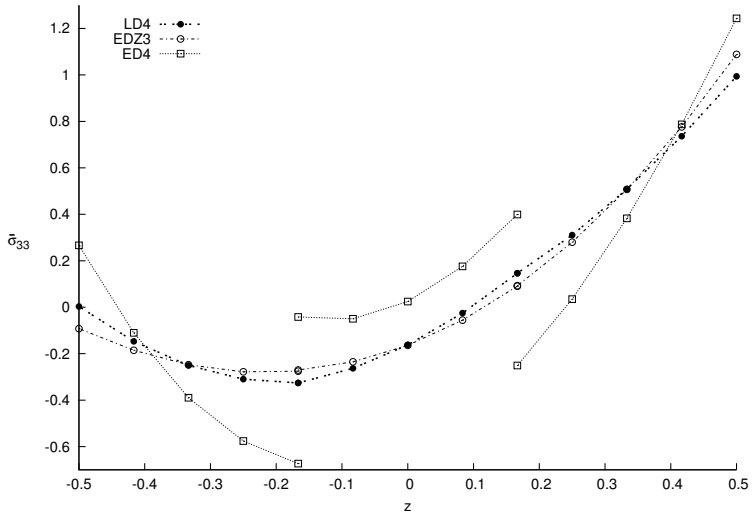

Figura 5.11: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

5.1.2 Laminazione asimmetrica $[0°/90°/0°/90°]$, numero strati N = 4

Nei grafici dello spostamento verticale $\bar{\boldsymbol{w}}$ si nota che, a differenza della teoria classica che predirebbe uno spostamento costante, gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono dei cambiamenti di pendenza pronunciati e non lineari per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$), mentre per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono lineari.
A causa della laminazione antisimmetrica le tensioni principali $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{11}}$ e $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{22}}$ hanno un valore al *bottom* differente di un ordine di grandezza rispetto ai casi con laminazione simmetrica. Per quanto riguarda i grafici delle tensioni di taglio $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ si evince che, a differenza della teoria classica che predirebbe una tensione costante a tratti, gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità. Sia per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$) che per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia. Nel caso di gusci sottili ($a/h = 100$) e rapporti di curvatura bassi ($R/a = 1$) si riesce ad ottenere la continuità solo con teorie *layer wise* di ordine elevato. Si deduce per tutti i casi l'impossibilità di descrivere correttamente il profilo di tensione tramite teorie classiche, *equivalent single layer* e zig-zag.
Anche per i grafici delle tensioni di taglio $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ si nota che ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità. Sia per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$) che per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia. Per i gusci sottili ($a/h = 100$) si vede che le teorie *equivalent single layer* non riescono affatto ad ottenere la continuità all'interfaccia e nemmeno il corretto profilo di tensione.

Tabella 5.11: Spostamento trasversale $\bar{w}$ valutato lungo lo spessore nel punto centrale ($z = 0$). Laminazione simmetrica con numero di strati N = 4. $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
Elast. [56]	...	...	...	1.434	0.6128	...	1.495	0.7408	...
$HSDT_1$ [55]	1.179	0.3748	...	1.433	0.6085	...	1.488	0.7345	...
$HSDT_2$ [57]	1.054	0.3467	...	1.376	0.5875	...	1.478	0.7293	...
$HSDT_3$ [56]	...	...	...	1.228	0.5673	...	...	...	...
$HSDT_4$ [56]	...	...	...	...	...	...	1.240	0.6664	...
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	1.1769	0.3763	0.0054	1.4343	0.6128	0.0208	1.4951	0.7408	0.1067
LD1	1.1578	0.3740	0.0054	1.4023	0.6061	0.0208	1.4580	0.7306	0.1067
EDZ3	1.1650	0.3746	0.0054	1.4152	0.6079	0.0208	1.4733	0.7333	0.1067
ED4	1.1190	0.3689	0.0054	1.3295	0.5899	0.0208	1.3719	0.7054	0.1067
ED2	0.9855	0.3543	0.0054	1.1026	0.5461	0.0208	1.1130	0.6399	0.1067
FSDT	0.9943	0.3543	0.0054	1.1096	0.5452	0.0208	1.1154	0.6383	0.1067
CLT	0.5823	0.3173	0.0054	0.5522	0.4478	0.0208	0.5261	0.5016	0.1066

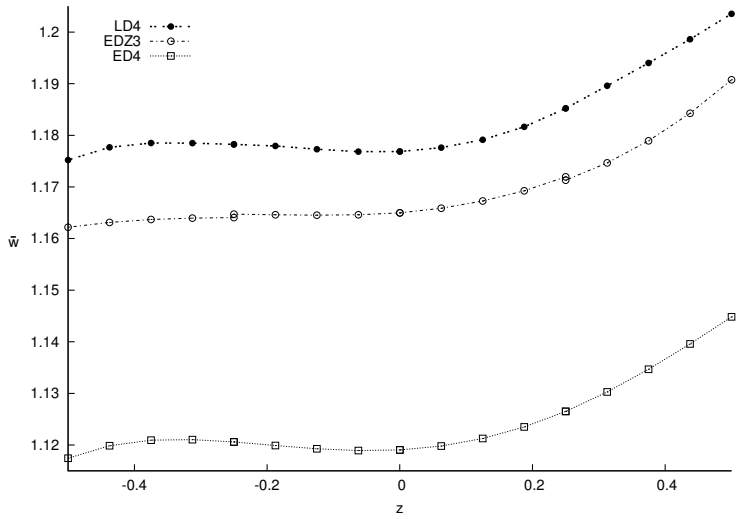

Figura 5.12: Spostamento $\bar{w}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 4

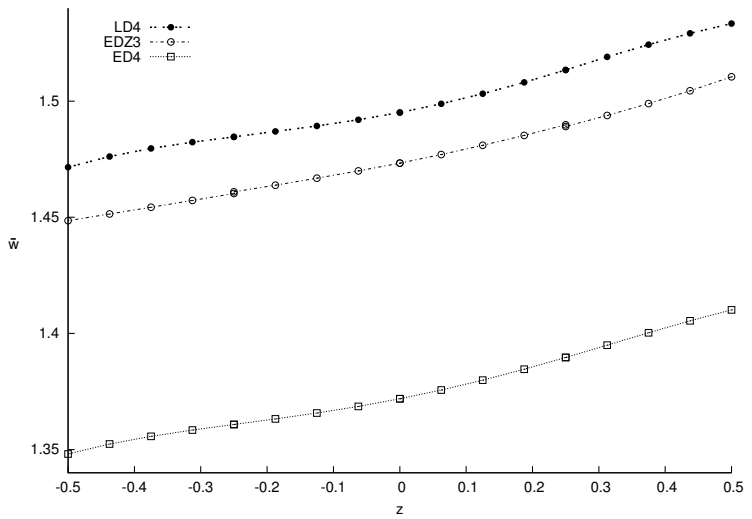

Figura 5.13: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 4

Tabella 5.12: Tensione principale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{11}}$ valutata lungo lo spessore nei punti esterni ($z = \pm h/2$). Laminazione simmetrica con numero di strati N = 4. $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	0.4982	0.2763	0.0140	0.6313	0.4463	0.0375	0.6647	0.5268	0.1386
	-0.0402	-0.0161	0.0001	-0.0560	-0.0313	-0.0005	-0.0606	-0.0403	-0.0056
LD1	0.4729	0.2726	0.0140	0.5953	0.4389	0.0375	0.6245	0.5170	0.1388
	-0.0414	-0.0169	0.0001	-0.0562	-0.0321	-0.0006	-0.0599	-0.0409	-0.0058
EDZ3	0.4973	0.2764	0.0140	0.6284	0.4455	0.0375	0.6607	0.5253	0.1387
	-0.0415	-0.0162	0.0001	-0.0565	-0.0312	-0.0005	-0.0607	-0.0402	-0.0056
ED4	0.4981	0.2797	0.0140	0.6187	0.4452	0.0375	0.6465	0.5210	0.1387
	-0.0408	-0.0163	0.0001	-0.0545	-0.0310	-0.0005	-0.0581	-0.0395	-0.0056
ED2	0.4053	0.2695	0.0140	0.4680	0.4147	0.0375	0.4733	0.4762	0.1386
	-0.0312	-0.0163	0.0001	-0.0385	-0.0288	-0.0005	-0.0395	-0.0352	-0.0056
FSDT	0.4053	0.2728	0.0140	0.4834	0.4220	0.0375	0.4956	0.4853	0.1387
	-0.0272	-0.0149	0.0001	-0.0344	-0.0272	-0.0005	-0.0360	-0.0339	-0.0056
CLT	0.4761	0.3064	0.0141	0.4990	0.4401	0.0376	0.4944	0.4877	0.1389
	-0.0386	-0.0184	0.0001	-0.0387	-0.0296	-0.0005	-0.0371	-0.0346	-0.0056

Tabella 5.13: Tensione principale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{22}}$ valutata lungo lo spessore nei punti esterni ($z = \pm h/2$). Laminazione simmetrica con numero di strati N = 4. $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	0.0578	0.0243	0.0008	0.0698	0.0381	0.0023	0.0722	0.0448	0.0093
	-0.4515	-0.1927	0.0048	-0.6057	-0.3819	-0.0011	-0.6446	-0.4961	-0.0638
LD1	0.0554	0.0238	0.0008	0.0676	0.0379	0.0024	0.0705	0.0448	0.0095
	-0.4252	-0.1911	0.0048	-0.5693	-0.3765	-0.0011	-0.6053	-0.4873	-0.0640
EDZ3	0.0578	0.0244	0.0008	0.0697	0.0381	0.0023	0.0721	0.0447	0.0093
	-0.4514	-0.1944	0.0048	-0.6030	-0.3826	-0.0011	-0.6406	-0.4952	-0.0639
ED4	0.0565	0.0243	0.0008	0.0672	0.0377	0.0024	0.0693	0.0439	0.0093
	-0.4610	-0.1985	0.0048	-0.5984	-0.3839	-0.0011	-0.6281	-0.4920	-0.0639
ED2	0.0434	0.0219	0.0008	0.0490	0.0332	0.0023	0.0499	0.0385	0.0093
	-0.3366	-0.1929	0.0048	-0.4292	-0.3592	-0.0011	-0.4479	-0.4505	-0.0639
FSDT	0.0315	0.0199	0.0008	0.0365	0.0309	0.0023	0.0368	0.0356	0.0093
	-0.3962	-0.1999	0.0048	-0.4831	-0.3682	-0.0011	-0.4960	-0.4604	-0.0639
CLT	0.0356	0.0218	0.0008	0.0370	0.0318	0.0023	0.0365	0.0356	0.0093
	-0.5354	-0.2384	0.0048	-0.5331	-0.3946	-0.0011	-0.5080	-0.4677	-0.0641

Tabella 5.14: Tensione principale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{12}}$ valutata lungo lo spessore nei punti esterni ($z = \pm h/2$). Laminazione simmetrica con numero di strati N = 4. $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	0.0241	0.0213	0.0048	-0.0042	0.0056	0.0088	-0.0262	-0.0146	0.0149
	0.0939	0.0515	0.0054	0.0759	0.0537	0.0109	0.0560	0.0433	0.0256
LD1	0.0244	0.0212	0.0048	-0.0033	0.0056	0.0088	-0.0246	-0.0142	0.0149
	0.0916	0.0512	0.0054	0.0732	0.0530	0.0109	0.0537	0.0426	0.0256
EDZ3	0.0245	0.0213	0.0048	-0.0035	0.0056	0.0088	-0.0252	-0.0143	0.0149
	0.0926	0.0513	0.0054	0.0743	0.0532	0.0109	0.0546	0.0428	0.0256
ED4	0.0222	0.0206	0.0048	-0.0052	0.0048	0.0088	-0.0255	-0.0146	0.0149
	0.0909	0.0510	0.0054	0.0720	0.0524	0.0109	0.0530	0.0420	0.0256
ED2	0.0224	0.0199	0.0048	-0.0003	0.0047	0.0088	-0.0162	-0.0129	0.0149
	0.0748	0.0486	0.0054	0.0543	0.0481	0.0109	0.0379	0.0377	0.0256
FSDT	0.0239	0.0201	0.0048	0.0010	0.0050	0.0088	-0.0151	-0.0126	0.0149
	0.0762	0.0487	0.0054	0.0547	0.0480	0.0109	0.0375	0.0374	0.0256
CLT	0.0016	0.0151	0.0048	-0.0131	-0.0006	0.0088	-0.0208	-0.0154	0.0149
	0.0608	0.0471	0.0054	0.0427	0.0445	0.0109	0.0321	0.0351	0.0256

Tabella 5.15: Tensione principale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ valutata lungo lo spessore nel punto ($z = -h/8$). Laminazione simmetrica con numero di strati N = 4. $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	0.1761	0.1013	0.0037	0.2168	0.1663	0.0112	0.2218	0.1975	0.0474
LD1	0.1621	0.0957	0.0036	0.1972	0.1557	0.0107	0.2007	0.1840	0.0451
EDZ3	0.1642	0.0977	0.0038	0.2005	0.1587	0.0113	0.2047	0.1875	0.0467
ED4	0.2111	0.1277	0.0049	0.2508	0.2040	0.0146	0.2527	0.2385	0.0601
ED2	0.1975	0.1196	0.0049	0.2211	0.1826	0.0138	0.2181	0.2083	0.0546
FSDT	0.2032	0.1262	0.0048	0.2363	0.1977	0.0141	0.2379	0.2289	0.0582

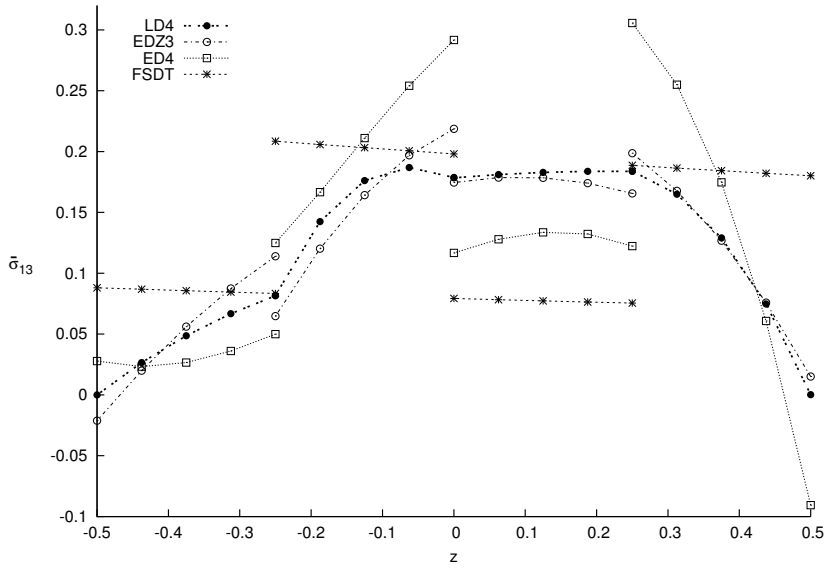

Figura 5.14: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 4

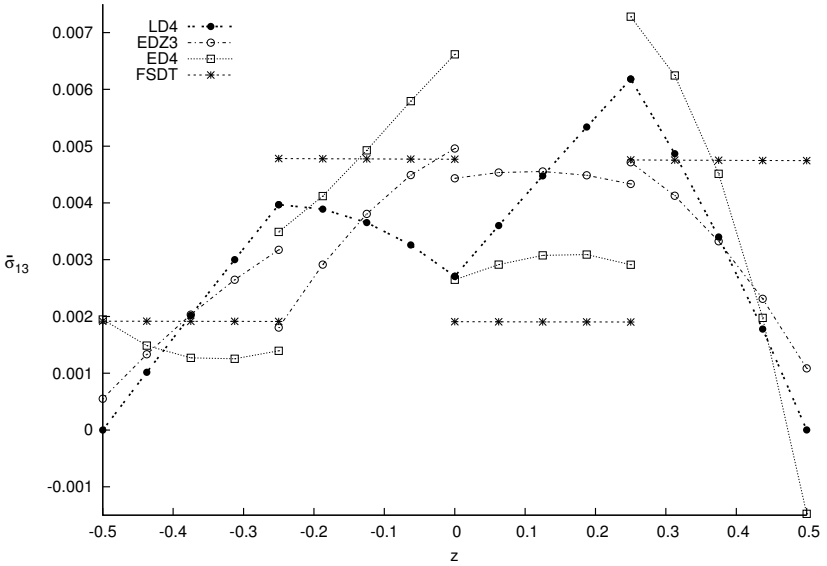

Figura 5.15: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione asimmetrica con strati N = 4

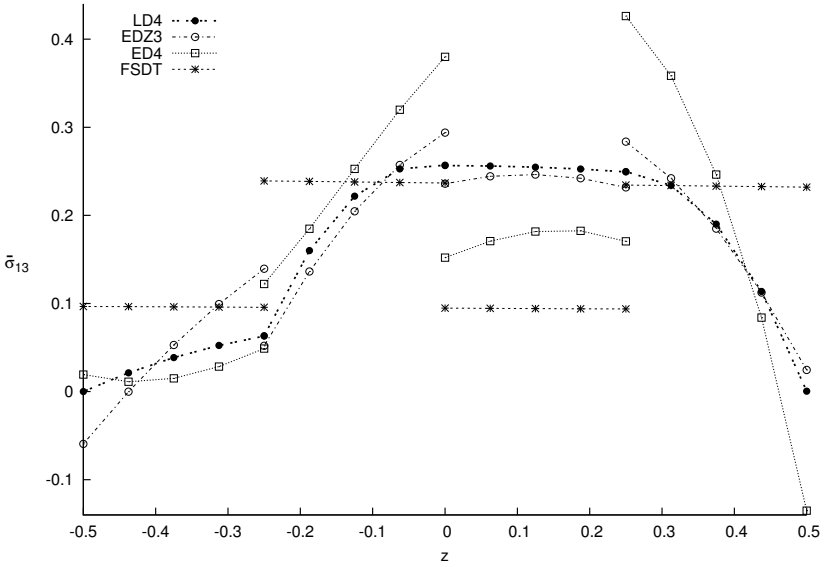

Figura 5.16: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 4

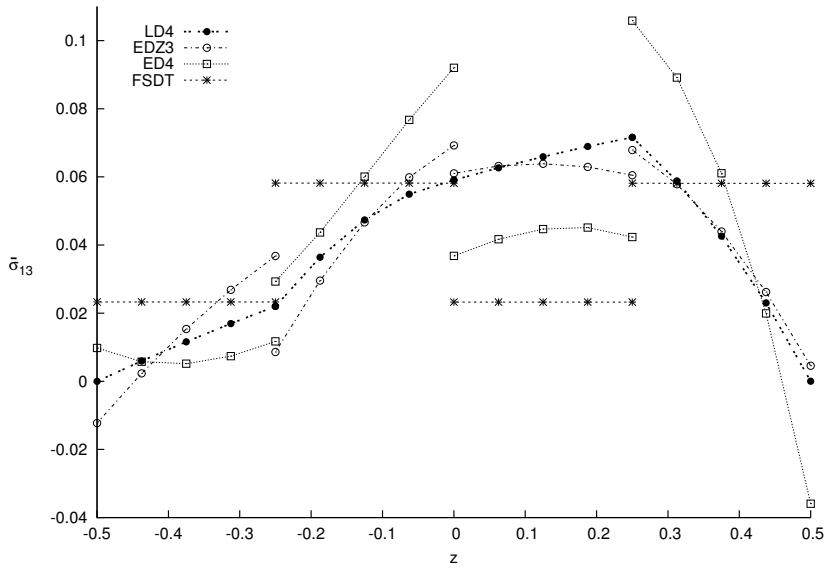

Figura 5.17: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione asimmetrica con strati N = 4

Tabella 5.16: Tensione principale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{23}}$ valutata lungo lo spessore nel punto $(z = +h/8)$. Laminazione simmetrica con numero di strati N = 4. $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	0.1379	0.0771	0.0001	0.1932	0.1464	0.0042	0.2129	0.1881	0.0331
LD1	0.1250	0.0720	0.0000	0.1745	0.1364	0.0038	0.1921	0.1750	0.0309
EDZ3	0.1279	0.0728	-0.0002	0.1786	0.1385	0.0035	0.1964	0.1781	0.0306
ED4	0.1594	0.0939	-0.0003	0.2201	0.1769	0.0044	0.2411	0.2260	0.0392
ED2	0.1506	0.0851	-0.0009	0.1952	0.1563	0.0027	0.2085	0.1964	0.0319
FSDT	0.1781	0.1002	-0.0003	0.2222	0.1778	0.0042	0.2323	0.2196	0.0379

Tabella 5.17: Tensione principale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ valutata lungo lo spessore nel punto ($z = +h/8$). Laminazione simmetrica con numero di strati N = 4. $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	0.3199	0.1213	0.4990	0.4351	0.1865	0.3565	0.5801	0.4475	0.0665
LD1	0.3231	0.1245	0.5018	0.4291	0.1825	0.3618	0.5656	0.4327	0.0748
EDZ3	0.3144	0.1148	0.5007	0.4196	0.1707	0.3594	0.5579	0.4222	0.0686
ED4	0.3080	0.1189	0.5294	0.4302	0.1969	0.4780	0.5750	0.4606	0.6886
ED2	0.3442	0.2494	0.5848	0.4479	0.3149	0.6252	0.5523	0.4975	1.1830

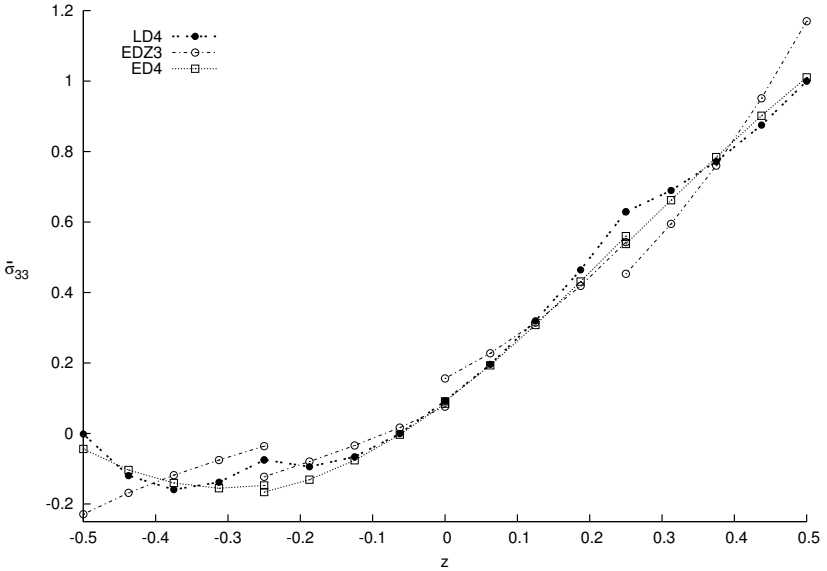

Figura 5.18: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 4

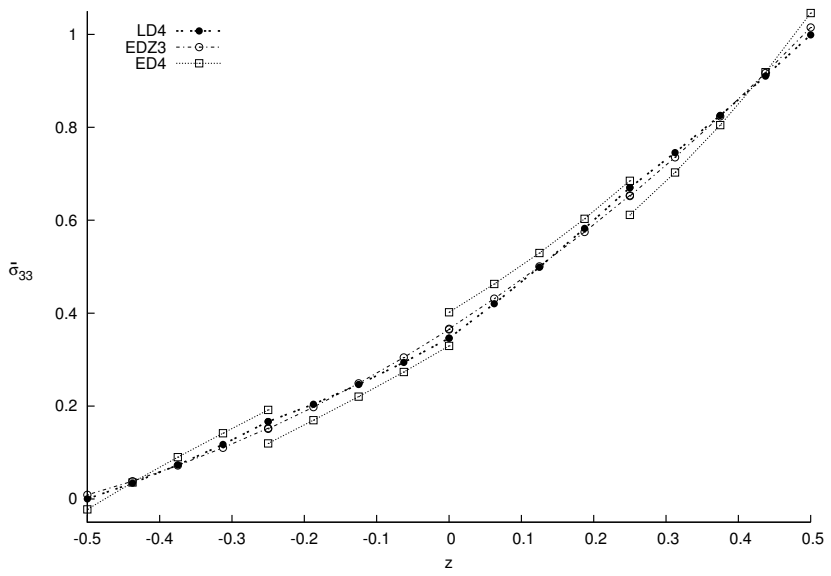

Figura 5.19: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione asimmetrica con strati N = 4

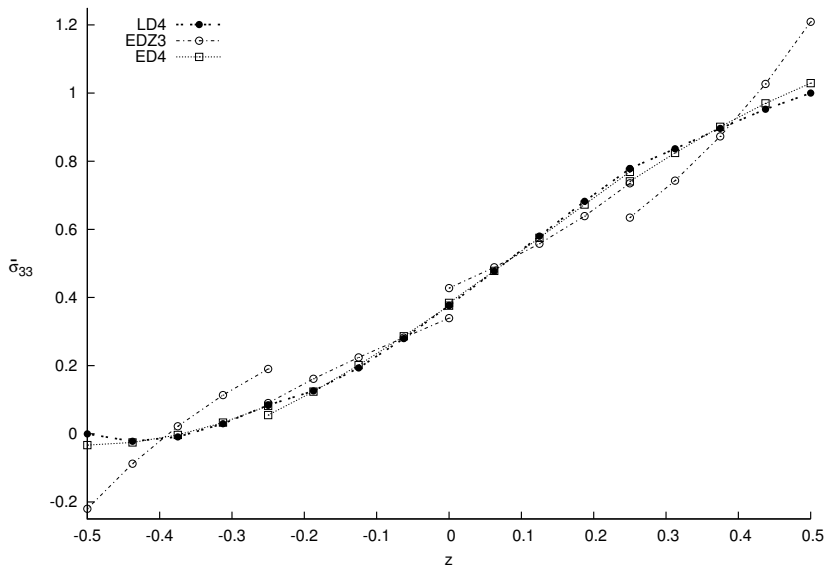

Figura 5.20: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 4

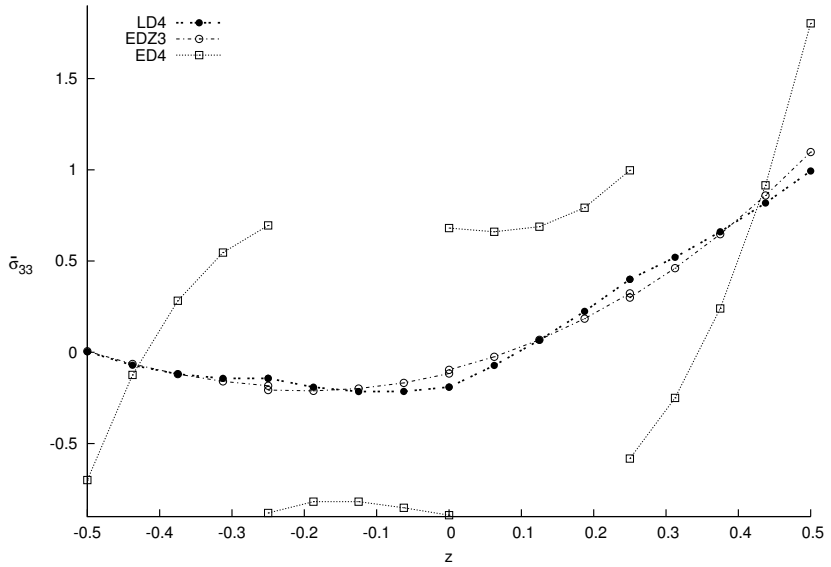

Figura 5.21: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione asimmetrica con strati N = 4

5.1.3 Laminazione simmetrica [0°/90°/0°/90°/0°], numero strati N = 5

Nei grafici dello spostamento verticale $\bar{\boldsymbol{w}}$ si nota che, a differenza della teoria classica che predirebbe uno spostamento costante, gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono dei cambiamenti di pendenza pronunciati e non lineari per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$), mentre per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono lineari.
Per quanto riguarda i grafici delle tensioni di taglio $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ si evince che, a differenza della teoria classica che predirebbe una tensione costante a tratti, gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità. Sia per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$) che per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia. Nel caso di gusci sottili ($a/h = 100$) e rapporti di curvatura bassi ($R/a = 1$) si riesce ad ottenere la continuità solo con teorie *layer wise* di ordine elevato. Si evince per tutti i casi l'impossibilità di descrivere correttamente il profilo di tensione tramite teorie classiche, *equivalent single layer* e zig-zag.
Anche per i grafici delle tensioni di taglio $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ si nota che ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità. Sia per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$) che per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia. Per i gusci sottili ($a/h = 100$) si vede che le teorie *equivalent single layer* non riescono affatto ad ottenere la continuità all'interfaccia e nemmeno il corretto profilo di tensione.

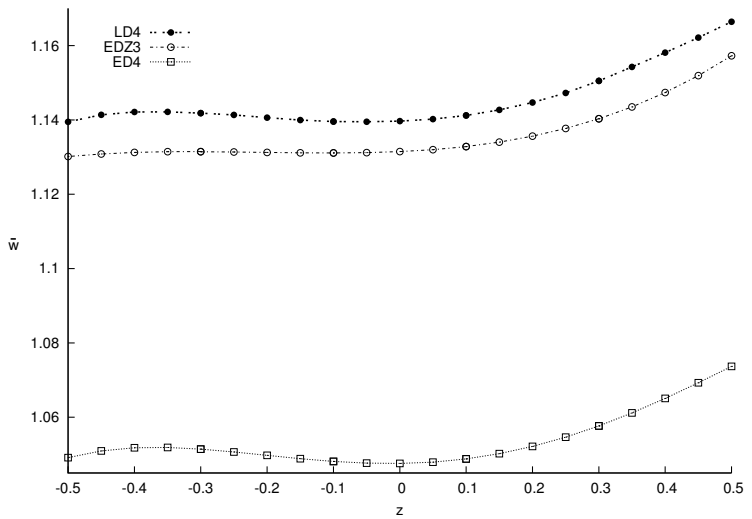

Figura 5.22: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 5

Tabella 5.18: Spostamento trasversale $\bar{\boldsymbol{w}}$ valutato lungo lo spessore nel punto centrale ($z = 0$). Laminazione simmetrica con numero di strati N = 5. $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
Elast. [56]	...	...	...	1.376	0.5671	...	1.417	0.6707	...
$HSDT_1$ [55]	1.151	0.3615	...	1.379	0.5670	...	1.425	0.6708	...
$HSDT_2$ [57]	1.025	0.3328	...	1.324	0.5468	...	1.414	0.6660	...
$HSDT_3$ [56]	...	...	...	1.217	0.5344	...	...	...	...
$HSDT_4$ [56]	...	...	...	...	...	...	1.228	0.6182	...
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	1.1397	0.3617	0.0054	1.3674	0.5671	0.0207	1.4165	0.6706	0.1032
LD1	1.1276	0.3601	0.0054	1.3469	0.5628	0.0207	1.3929	0.6645	0.1032
EDZ3	1.1315	0.3608	0.0054	1.3543	0.5647	0.0207	1.4017	0.6672	0.1032
ED4	1.0476	0.3504	0.0054	1.2052	0.5341	0.0207	1.2286	0.6219	0.1032
ED2	0.9628	0.3407	0.0054	1.0676	0.5077	0.0207	1.0744	0.5842	0.1032
FSDT	0.9794	0.3413	0.0054	1.0873	0.5090	0.0207	1.0910	0.5862	0.1032
CLT	0.5133	0.2937	0.0054	0.4744	0.3929	0.0207	0.4486	0.4294	0.1031

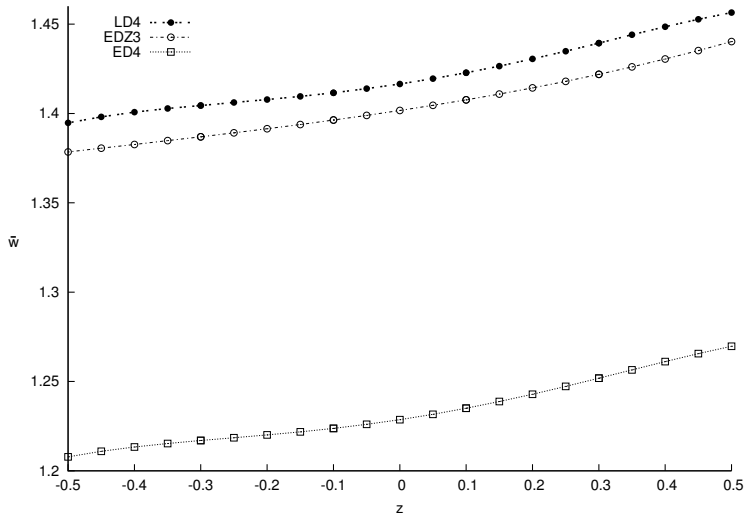

Figura 5.23: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 5

Tabella 5.19: Tensione principale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{11}}$ valutata lungo lo spessore nei punti esterni ($z = \pm h/2$). Laminazione simmetrica con numero di strati N = 5. $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	0.4995	0.2959	0.0139	0.6236	0.4693	0.0402	0.6520	0.5482	0.1574
	-0.4510	-0.2267	0.0020	-0.5969	-0.4185	-0.0096	-0.6320	-0.5244	-0.0965
LD1	0.4808	0.2929	0.0139	0.5974	0.4637	0.0402	0.6230	0.5410	0.1576
	-0.4308	-0.2252	0.0020	-0.5700	-0.4142	-0.0097	-0.6034	-0.5179	-0.0967
EDZ3	0.4946	0.2949	0.0139	0.6159	0.4671	0.0402	0.6434	0.5453	0.1574
	-0.4466	-0.2267	0.0020	-0.5894	-0.4172	-0.0096	-0.6232	-0.5219	-0.0965
ED4	0.4879	0.3005	0.0139	0.5875	0.4660	0.0402	0.6058	0.5376	0.1575
	-0.4473	-0.2358	0.0020	-0.5649	-0.4200	-0.0097	-0.5870	-0.5163	-0.0967
ED2	0.4146	0.2919	0.0139	0.4764	0.4430	0.0402	0.4809	0.5054	0.1575
	-0.3483	-0.2295	0.0020	-0.4390	-0.3999	-0.0097	-0.4561	-0.4858	-0.0967
FSDT	0.3991	0.2926	0.0139	0.4665	0.4445	0.0402	0.4733	0.5067	0.1576
	-0.3635	-0.2288	0.0020	-0.4518	-0.3993	-0.0097	-0.4679	-0.4862	-0.0967
CLT	0.5343	0.3488	0.0140	0.5523	0.4884	0.0403	0.5461	0.5367	0.1580
	-0.6238	-0.3088	0.0019	-0.5997	-0.4642	-0.0098	-0.5647	-0.5265	-0.0972

Tabella 5.20: Tensione principale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{22}}$ valutata lungo lo spessore nei punti esterni ($z = \pm h/2$). Laminazione simmetrica con numero di strati N = 5. $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	0.0517	0.0215	0.0009	0.0614	0.0322	0.0023	0.0632	0.0367	0.0084
	-0.0352	-0.0133	0.0002	-0.0482	-0.0254	-0.0002	-0.0518	-0.0323	-0.0042
LD1	0.0500	0.0212	0.0009	0.0601	0.0320	0.0023	0.0624	0.0369	0.0085
	-0.0368	-0.0141	0.0002	-0.0491	-0.0263	-0.0002	-0.0519	-0.0330	-0.0044
EDZ3	0.0522	0.0217	0.0009	0.0621	0.0324	0.0023	0.0640	0.0370	0.0084
	-0.0371	-0.0136	0.0002	-0.0495	-0.0257	-0.0002	-0.0528	-0.0326	-0.0042
ED4	0.0494	0.0214	0.0009	0.0572	0.0312	0.0023	0.0583	0.0353	0.0084
	-0.0351	-0.0135	0.0002	-0.0451	-0.0249	-0.0002	-0.0473	-0.0311	-0.0042
ED2	0.0396	0.0194	0.0009	0.0444	0.0282	0.0023	0.0452	0.0319	0.0084
	-0.0283	-0.0138	0.0002	-0.0344	-0.0238	-0.0002	-0.0350	-0.0287	-0.0043
FSDT	0.0305	0.0178	0.0008	0.0356	0.0266	0.0023	0.0360	0.0300	0.0084
	-0.0278	-0.0129	0.0002	-0.0344	-0.0230	-0.0002	-0.0356	-0.0284	-0.0042
CLT	0.0277	0.0182	0.0008	0.0279	0.0248	0.0023	0.0273	0.0269	0.0084
	-0.0296	-0.0143	0.0002	-0.0291	-0.0223	-0.0002	-0.0277	-0.0258	-0.0043

Tabella 5.21: Tensione principale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{12}}$ valutata lungo lo spessore nei punti esterni ($z = \pm h/2$). Laminazione simmetrica con numero di strati N = 5. $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	0.0255	0.0210	0.0048	-0.0015	0.0060	0.0088	-0.0222	-0.0122	0.0144
	0.0894	0.0491	0.0054	0.0700	0.0489	0.0108	0.0505	0.0382	0.0247
LD1	0.0257	0.0209	0.0048	-0.0009	0.0060	0.0088	-0.0212	-0.0120	0.0144
	0.0878	0.0488	0.0054	0.0683	0.0485	0.0108	0.0490	0.0378	0.0247
EDZ3	0.0258	0.0210	0.0048	-0.0010	0.0060	0.0088	-0.0215	-0.0121	0.0144
	0.0885	0.0490	0.0054	0.0690	0.0487	0.0108	0.0495	0.0380	0.0247
ED4	0.0225	0.0199	0.0048	-0.0027	0.0048	0.0088	-0.0209	-0.0123	0.0144
	0.0840	0.0481	0.0054	0.0636	0.0469	0.0108	0.0456	0.0365	0.0247
ED2	0.0231	0.0195	0.0048	0.0011	0.0049	0.0088	-0.0144	-0.0111	0.0144
	0.0722	0.0464	0.0054	0.0514	0.0442	0.0108	0.0354	0.0338	0.0247
FSDT	0.0238	0.0196	0.0048	0.0012	0.0050	0.0088	-0.0147	-0.0112	0.0144
	0.0752	0.0467	0.0054	0.0536	0.0445	0.0108	0.0366	0.0340	0.0247
CLT	0.0015	0.0139	0.0048	-0.0112	-0.0006	0.0087	-0.0178	-0.0132	0.0143
	0.0537	0.0436	0.0054	0.0367	0.0390	0.0108	0.0274	0.0300	0.0247

Tabella 5.22: Tensione principale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ valutata lungo lo spessore nel punto ($z = 0$). Laminazione simmetrica con numero di strati N = 5. $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	0.2078	0.1418	0.0035	0.2681	0.2401	0.0146	0.2826	0.2899	0.0744
LD1	0.2018	0.1393	0.0035	0.2590	0.2351	0.0143	0.2725	0.2832	0.0730
EDZ3	0.2123	0.1472	0.0037	0.2729	0.2487	0.0153	0.2873	0.2999	0.0776
ED4	0.3375	0.2334	0.0056	0.4180	0.3844	0.0231	0.4335	0.4570	0.1176
ED2	0.2293	0.1557	0.0036	0.2740	0.2509	0.0148	0.2803	0.2949	0.0753
FSDT	0.2295	0.1554	0.0036	0.2752	0.2502	0.0147	0.2819	0.2941	0.0748

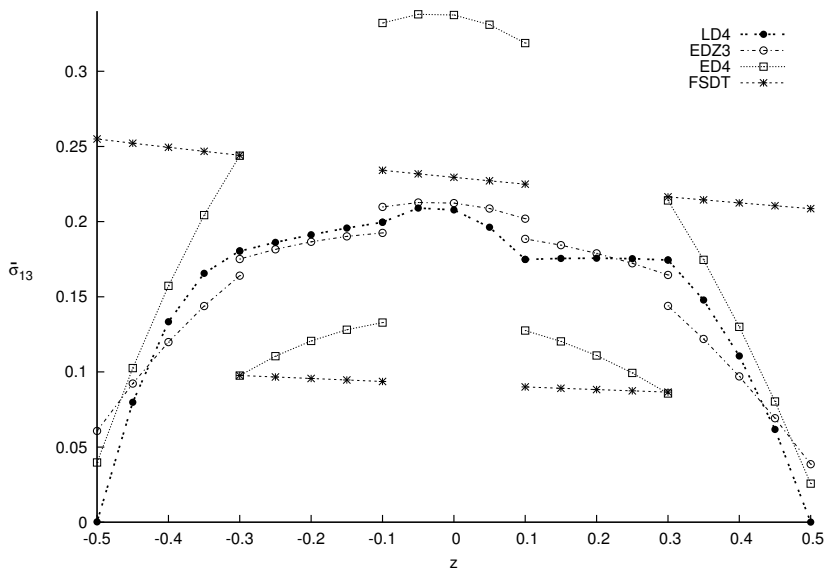

Figura 5.24: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 5

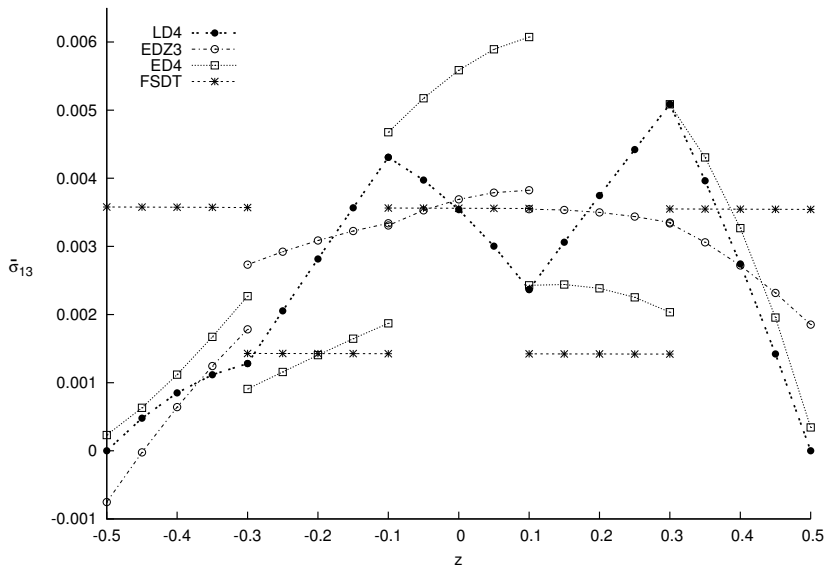

Figura 5.25: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 5

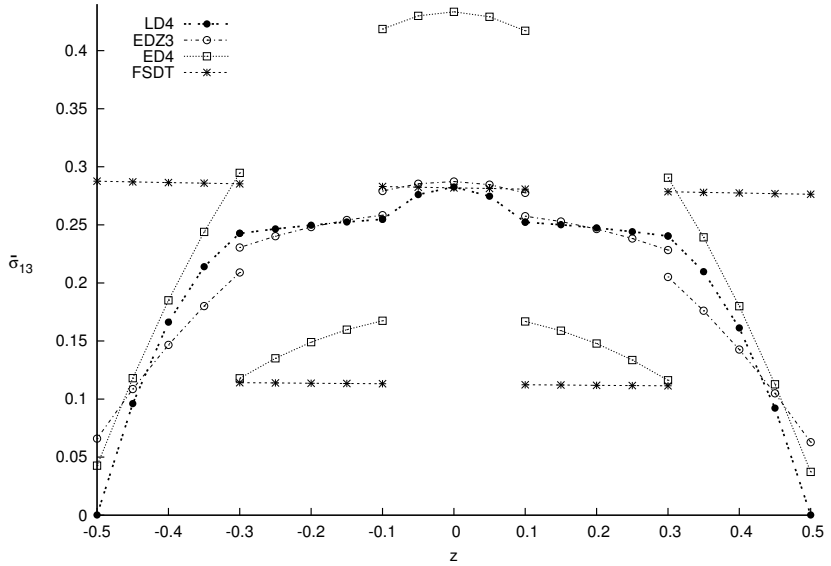

Figura 5.26: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 5

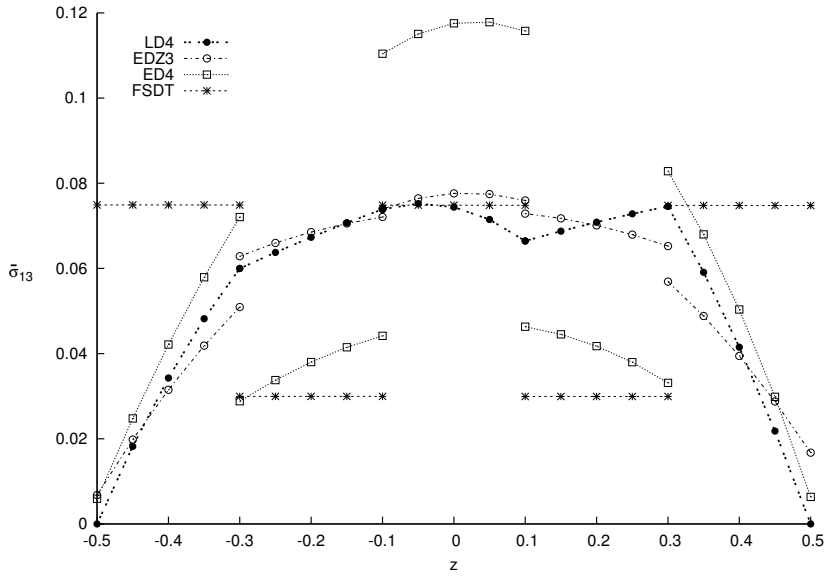

Figura 5.27: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 5

Tabella 5.23: Tensione principale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{23}}$ valutata lungo lo spessore nel punto ($z = 0$). Laminazione simmetrica con numero di strati N = 5. $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	0.1565	0.0912	0.0019	0.2021	0.1543	0.0078	0.2132	0.1863	0.0399
LD1	0.1581	0.0915	0.0019	0.2034	0.1544	0.0078	0.2141	0.1861	0.0398
EDZ3	0.1469	0.0837	0.0017	0.1895	0.1415	0.0071	0.1997	0.1707	0.0360
ED4	0.0900	0.0490	0.0010	0.1118	0.0806	0.0040	0.1160	0.0958	0.0203
ED2	0.0593	0.0307	0.0006	0.0705	0.0493	0.0024	0.0720	0.0578	0.0123
FSDT	0.0587	0.0304	0.0006	0.0702	0.0488	0.0024	0.0719	0.0573	0.0121

Tabella 5.24: Tensione principale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ valutata lungo lo spessore nel punto ($z = 0$). Laminazione simmetrica con numero di strati N = 5. $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
LD4	0.0915	-0.1208	0.3465	0.2200	-0.0431	0.1748	0.3787	0.2354	-0.1662
LD1	0.0980	-0.1148	0.3486	0.2255	-0.0362	0.1789	0.3811	0.2392	-0.1577
EDZ3	0.0962	-0.1191	0.3468	0.2238	-0.0409	0.1752	0.3804	0.2367	-0.1653
ED4	0.0545	-0.1538	0.2864	0.2101	-0.0543	0.0592	0.3770	0.2344	-0.3967
ED2	0.1855	0.0581	0.3624	0.3056	0.1366	0.2163	0.4168	0.3277	-0.0770

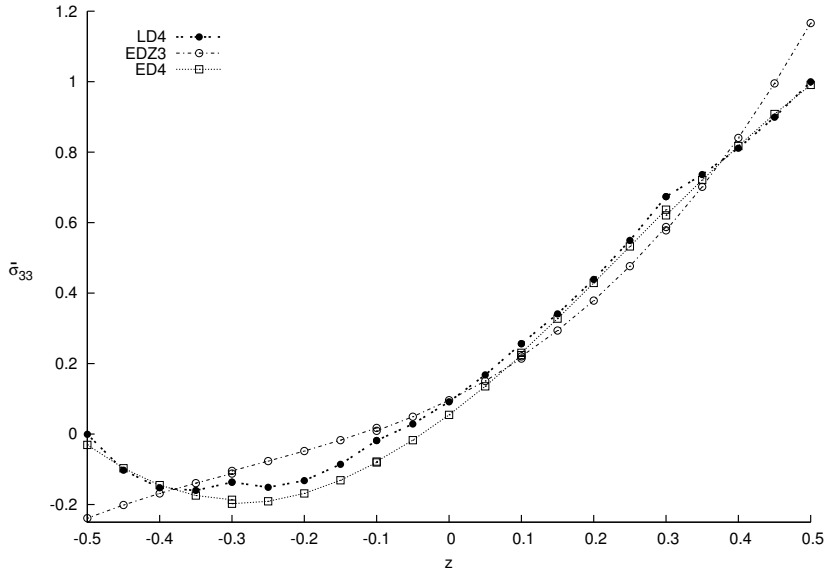

Figura 5.28: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 5

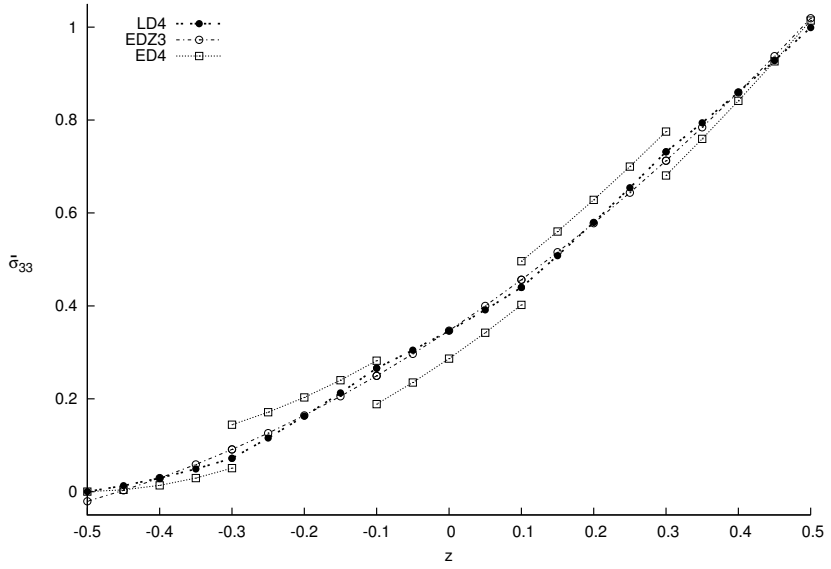

Figura 5.29: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 5

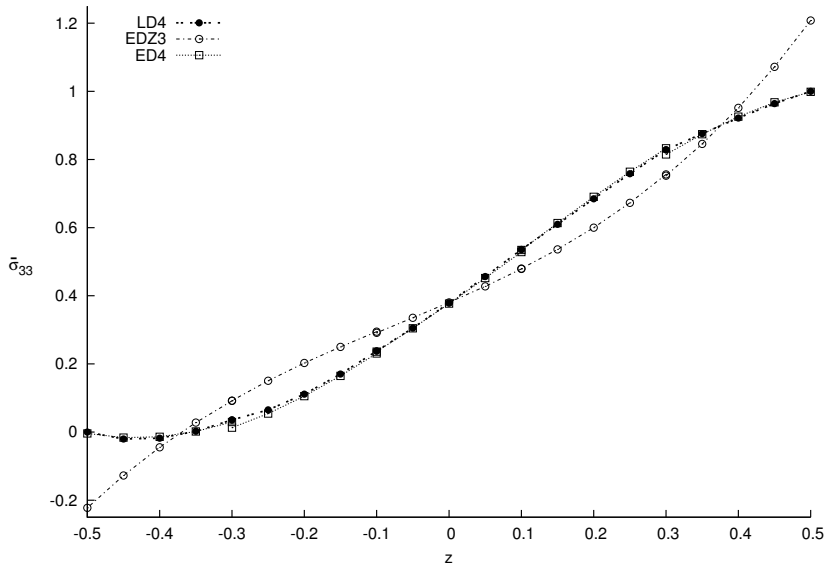

Figura 5.30: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 5

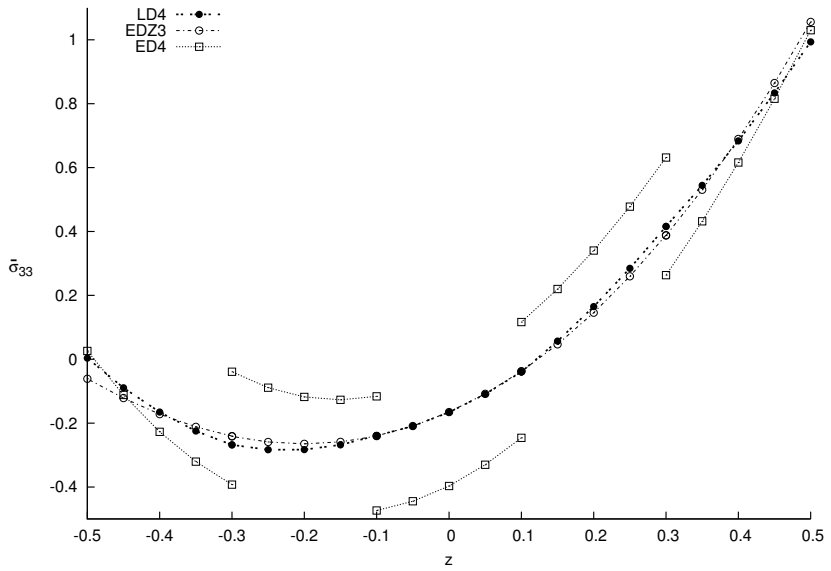

Figura 5.31: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 5

5.2 Casi studio sotto carichi puramente meccanici

I risultati qui di seguito presentati si riferiscono ad una struttura *guscio cross-ply* quadrata di tipo sferico. Sono stati analizzati i seguenti casi:

- Laminazione asimmetrica $[45°/-45°]$ con numero di strati $N = 2$, semplicemente appoggiata con carico bi-sinusoidale.
- Laminazione asimmetrica $[45°/45°/-45°/-45°]$ con numero di strati $N = 4$, semplicemente appoggiata con carico bi-sinusoidale.
- Laminazione asimmetrica $[45°/45°/45°/-45°/-45°/-45°]$ con numero di strati $N = 6$, semplicemente appoggiata con carico bi-sinusoidale.
- Laminazione simmetrica $[45°/-45°/45°]$ con numero di strati $N = 3$, semplicemente appoggiata con carico bi-sinusoidale.
- Laminazione simmetrica $[0°/90°/0°]$ con numero di strati $N = 3$, incastrata su due lati paralleli e libera sugli altri due,con carico bi-sinusoidale.
- Laminazione simmetrica $[0°/0°/90°/90°/0°/0°]$ con numero di strati $N = 6$, incastrata su due lati paralleli e libera sugli altri due,con carico bi-sinusoidale.
- Laminazione simmetrica $[90°/0°/90°]$ con numero di strati $N = 3$, semplicemente appoggiata con carico concentrato posto in mezzeria.
- Laminazione simmetrica $[90°/90°/0°/0°/90°/90°]$ con numero di strati $N = 6$, semplicemente appoggiata con carico concentrato posto in mezzeria.

Per ogni caso sono stati valutati rapporti $R/a = 1, 2, 5$.
Il carico meccanico applicato al *top* è di tipo bi-sinusoidale $p^+ = \hat{p}_z^+ \, sin(\pi\alpha/a) sin(\pi\beta/a)$.
Per il carico concentrato è stato scelto un carico pari a $P = \hat{p}_z^+ * a^2$. In tutti i problemi sono state usate le stesse proprietà dei materiali dei casi trattati in precedenza, [Tabella 5.1].
Nelle tabelle seguenti per le variabili incognite sono stati usati i pedici $(\,1\,2\,3\,)$ al posto di $(\,\alpha\,\beta\,z\,)$.
I risultati sono stati adimensionati nel modo seguente:

$$\bar{w} = w(a/2, a/2)\frac{100\, E_{22}\, h^3}{a^4\, \hat{p}_z^+} \quad ; \quad \bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11}(a/2, a/2)\frac{h^2}{a^2\, \hat{p}_z^+}$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \sigma_{22}(a/2, a/2)\frac{h^2}{a^2\, \hat{p}_z^+} \quad ; \quad \bar{\sigma}_{12} = \sigma_{12}(0, 0)\frac{h^2}{a^2\, \hat{p}_z^+}$$

$$\bar{\sigma}_{13} = \sigma_{13}(0, a/2)\frac{h}{a\, \hat{p}_z^+} \quad ; \quad \bar{\sigma}_{23} = \sigma_{23}(a/2, 0)\frac{h}{a\, \hat{p}_z^+}$$

$$\bar{\sigma}_{33} = \sigma_{33}(a/2, a/2)\frac{1}{\hat{p}_z^+}$$

Per il caso con il carico concentrato le formule di adimensionalizzazione sono le seguenti:

$$\bar{w} = w(a/2, a/2)\frac{10^4\, E_{22}\, h^3}{a^6\, \hat{p}_z^+} \quad ; \quad \bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11}(a/2, a/2)\frac{100 * h^2}{a^4\, \hat{p}_z^+}$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \sigma_{22}(a/2, a/2)\frac{100 * h^2}{a^4\, \hat{p}_z^+} \quad ; \quad \bar{\sigma}_{12} = \sigma_{12}(0, 0)\frac{100 * h^2}{a^4\, \hat{p}_z^+}$$

$$\bar{\sigma}_{13} = \sigma_{13}(0, a/2)\frac{100 * h}{a^3\, \hat{p}_z^+} \quad ; \quad \bar{\sigma}_{23} = \sigma_{23}(a/2, 0)\frac{100 * h}{a^3\, \hat{p}_z^+}$$

$$\bar{\sigma}_{33} = \sigma_{33}(a/2, a/2)\frac{1}{a^2 \hat{p}_z^+}$$

5.2.1 Laminazione asimmetrica $[45°/-45°]$, numero strati N = 2 , semplicemente appoggiata,con carico bi-sinusoidale

Nei grafici dello spostamento verticale $\bar{\boldsymbol{w}}$ si nota che gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono dei cambiamenti di pendenza pronunciati e non lineari per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$), mentre per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono lineari.
Per quanto riguarda i grafici delle tensioni di taglio $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ si evince che gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità, va sottolineato il picco di tensione all'interfaccia tra i due strati. Sia per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$) che per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia. Nel caso di gusci sottili ($a/h = 100$) non si riesce ad ottenere la continuità all'interfaccia, si nota infatti il picco di tensione. Per risolvere questo problema bisognerebbe modellizzare a priori il profilo di tensione con un principio variazionale misto (RMVT).
Anche per i grafici delle tensioni di taglio $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ si nota che ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità. Sia per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$) che per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia. Per i gusci sottili ($a/h = 100$) si vede che non si riesce ad ottenere perfettamente la continuità all'interfaccia. Per risolvere questo problema bisognerebbe modellizzare a priori il profilo di tensione con un principio variazionale misto (RMVT) o inserire degli strati fittizi per migliorare l'approssimazione del profilo.

Tabella 5.25: Laminazione asimmetrica $[45°/-45°]$ con numero di strati $N = 2$, semplicemente appoggiata,con carico bi-sinusoidale. Teoria LD4 con $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
w	0.4437	0.1109	0.0009	0.8563	0.3003	0.0036	1.1592	0.5721	0.0236
σ_{11}	0.1911	0.0818	0.0051	0.2875	0.1690	0.0101	0.3253	0.2546	0.0309
	0.0025	0.0238	0.0047	-0.1034	-0.0257	0.0086	-0.2184	-0.1440	0.0165
σ_{22}	0.1911	0.0818	0.0051	0.2875	0.1690	0.0101	0.3253	0.2546	0.0309
	0.0025	0.0238	0.0047	-0.1034	-0.0257	0.0086	-0.2184	-0.1440	0.0165
σ_{12}	0.0004	-0.0091	-0.0019	-0.0328	-0.0372	-0.0118	-0.0672	-0.0690	-0.0483
	1.0478	0.4959	0.0307	1.3119	0.7730	0.0725	1.1379	0.8136	0.2003
σ_{13}	0.0928	0.0479	0.0052	0.1522	0.1000	0.0122	0.1903	0.1632	0.0393
σ_{23}	0.0776	0.0323	-0.0021	0.1369	0.0741	-0.0074	0.1843	0.1417	-0.0287
σ_{33}	0.6992	0.7057	0.7733	0.6854	0.6430	0.8106	0.7324	0.6740	0.9641

Tabella 5.26: Laminazione asimmetrica $[45°/-45°]$ con numero di strati $N = 2$, semplicemente appoggiata,con carico bi-sinusoidale. Teoria EDZ3 con $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
w	0.4183	0.1060	0.0009	0.8201	0.2884	0.0035	1.1249	0.5548	0.0234
σ_{11}	0.1839	0.0809	0.0052	0.2753	0.1658	0.0102	0.3116	0.2500	0.0310
	0.0052	0.0239	0.0047	-0.0930	-0.0231	0.0086	-0.2048	-0.1388	0.0165
σ_{22}	0.1839	0.0809	0.0052	0.2753	0.1658	0.0102	0.3116	0.2500	0.0310
	0.0052	0.0239	0.0047	-0.0930	-0.0231	0.0086	-0.2048	-0.1388	0.0165
σ_{12}	0.0374	0.0100	-0.0024	0.0001	-0.0095	-0.0128	-0.0573	-0.0464	-0.0505
	0.9793	0.4509	0.0302	1.2706	0.7227	0.0711	1.1554	0.7964	0.1968
σ_{13}	0.0909	0.0556	0.0051	0.1525	0.1205	0.0129	0.1947	0.2040	0.0474
σ_{23}	0.0802	0.0446	0.0003	0.1412	0.1016	-0.0002	0.1902	0.1879	0.0018
σ_{33}	0.7064	0.7207	0.7741	0.6792	0.6565	0.8041	0.7106	0.6698	0.9262

Le varie grandezze sono state valutate lungo lo spessore nel modo seguente:

$(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$	in	$z = \pm h/2$
(w)	in	$z = 0$
(σ_{13})	in	$z = -h/4$
$(\sigma_{23}, \sigma_{33})$	in	$z = +h/4$

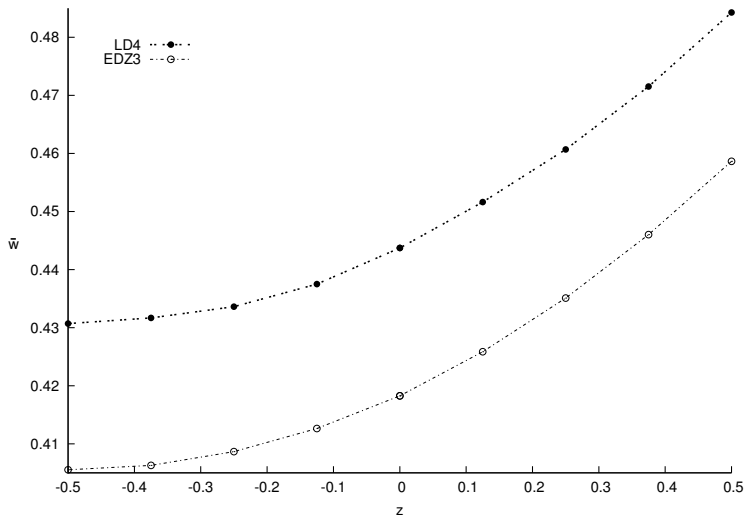

Figura 5.32: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 2

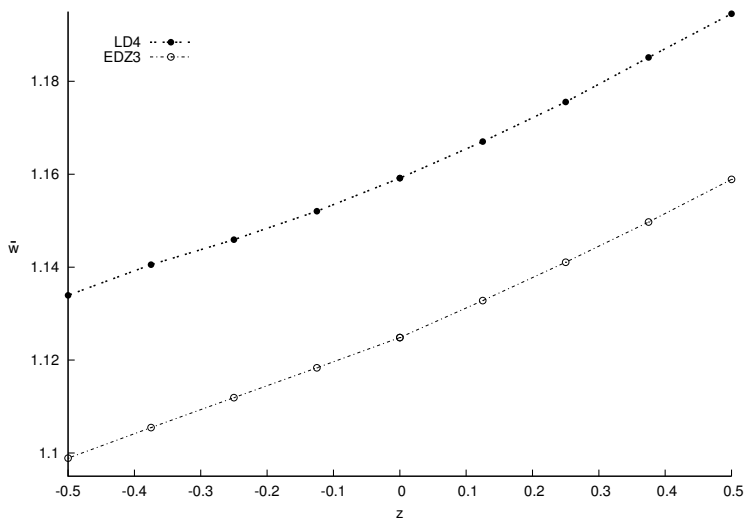

Figura 5.33: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 2

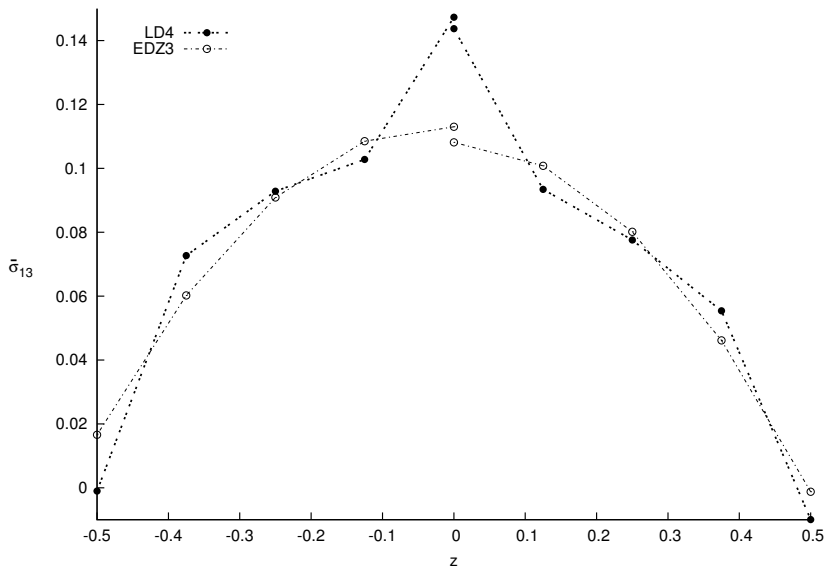

Figura 5.34: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 2

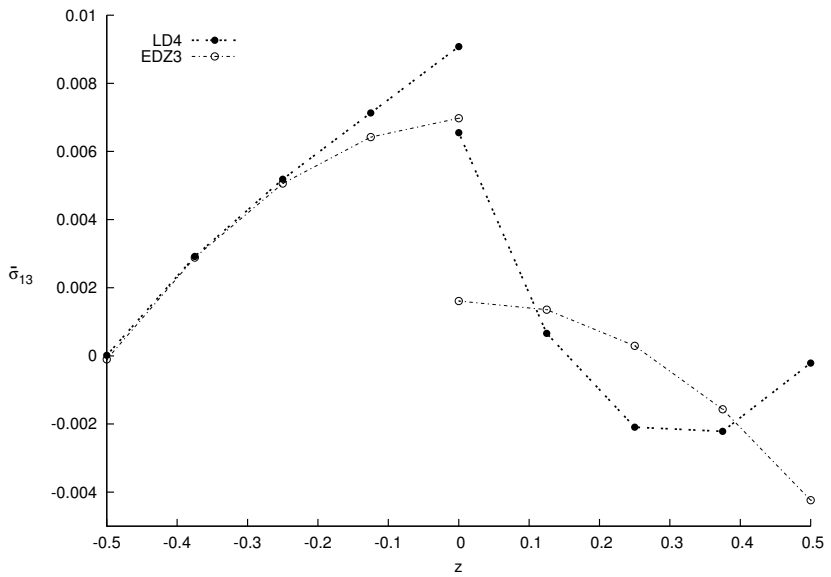

Figura 5.35: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione asimmetrica con strati N = 2

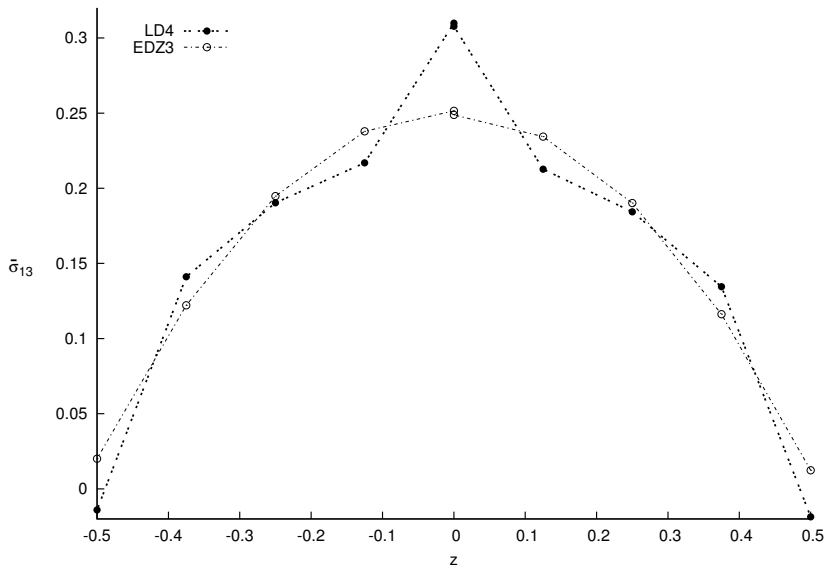

Figura 5.36: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 2

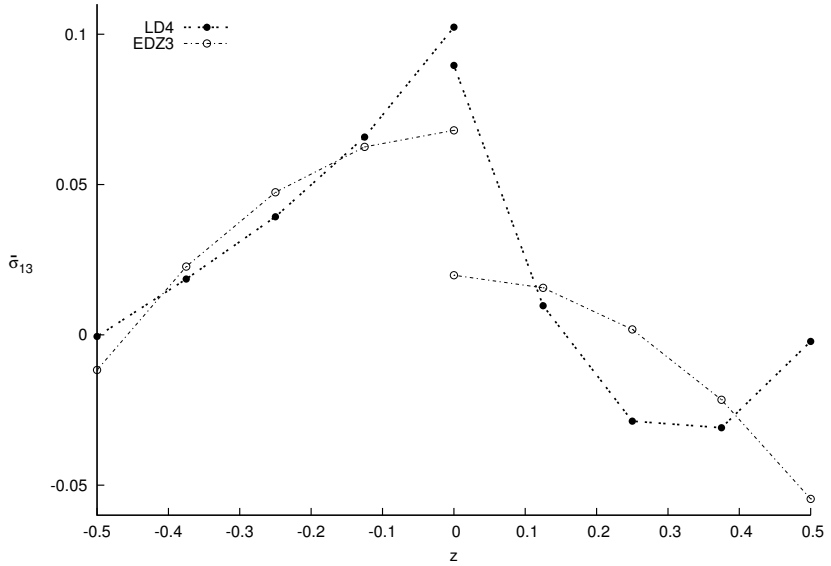

Figura 5.37: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione asimmetrica con strati N = 2

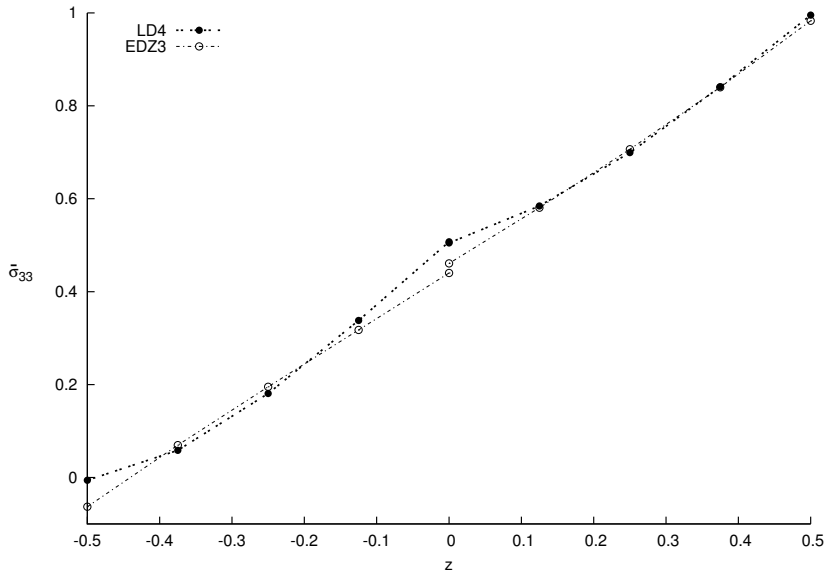

Figura 5.38: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 2

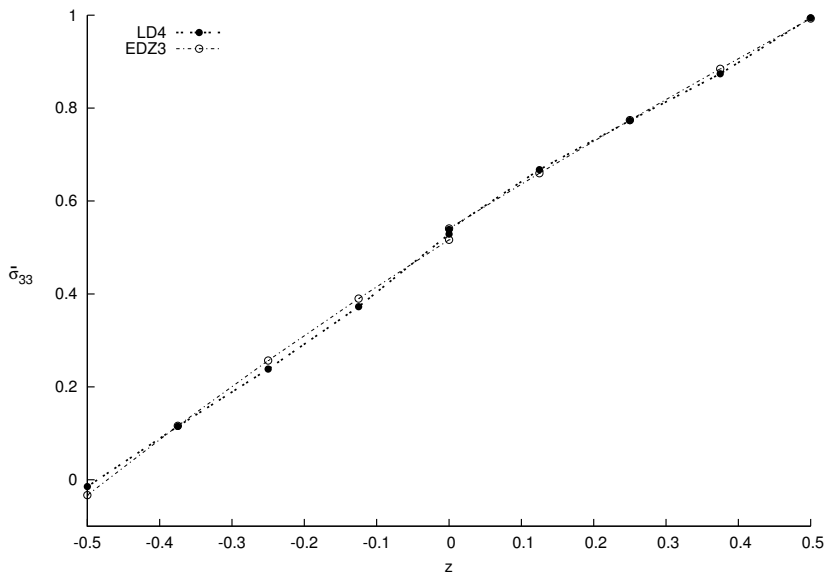

Figura 5.39: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione asimmetrica con strati N = 2

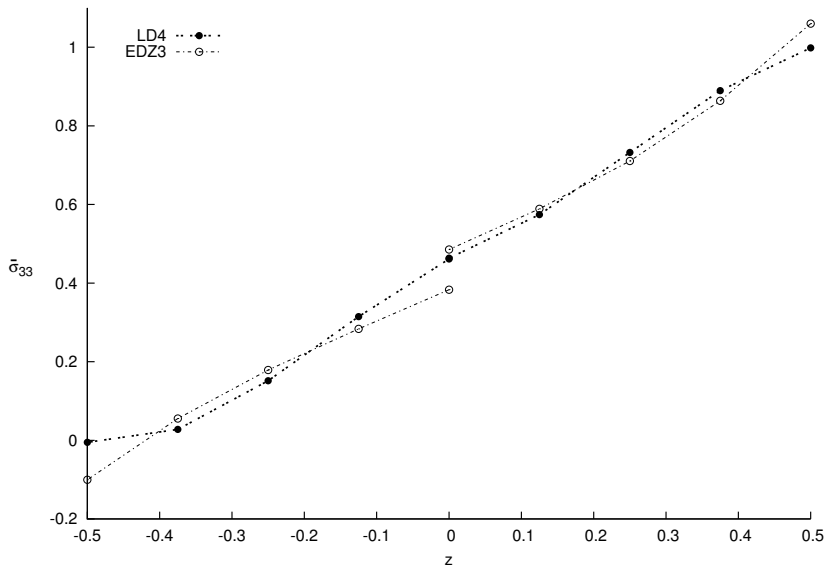

Figura 5.40: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 2

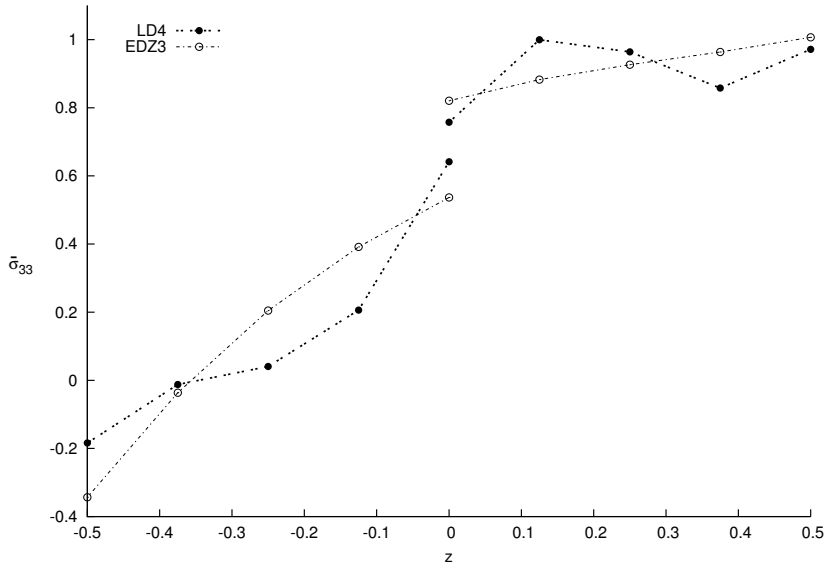

Figura 5.41: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione asimmetrica con strati N = 2

5.2.2 Laminazione asimmetrica $[45°/45°/-45°/-45°]$, numero strati N = 4, semplicemente appoggiata,con carico bi-sinusoidale

Nei grafici dello spostamento verticale $\bar{\boldsymbol{w}}$ si nota che gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono dei cambiamenti di pendenza pronunciati e non lineari per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$), mentre per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono lineari.
Per quanto riguarda i grafici delle tensioni di taglio $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ si evince che gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità, va sottolineato il picco di tensione all'interfaccia tra i due strati. Sia per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$) che per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia. Nel caso di gusci sottili ($a/h = 100$) non si riesce ad ottenere la continuità all'interfaccia, si nota infatti il picco di tensione. Per risolvere questo problema bisognerebbe modellizzare a priori il profilo di tensione con un principio variazionale misto (RMVT).
Anche per i grafici delle tensioni di taglio $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ si nota che ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità. Sia per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$) che per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia. Per i gusci sottili ($a/h = 100$) si vede che non si riesce ad ottenere perfettamente la continuità all'interfaccia. Per risolvere questo problema bisognerebbe modellizzare a priori il profilo di tensione con un principio variazionale misto (RMVT) o inserire degli strati fittizi per migliorare l'approssimazione del profilo.

Tabella 5.27: Laminazione asimmetrica $[45°/45°/-45°/-45°]$ con numero di strati $N = 4$, semplicemente appoggiata,con carico bi-sinusoidale. Teoria LD4 con $Mesh$ (9×9).

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
w	0.4467	0.1114	0.0009	0.8602	0.3014	0.0036	1.1624	0.5735	0.0236
σ_{11}	0.1915 0.0025	0.0819 0.0238	0.0051 0.0047	0.2879 -0.1039	0.1692 -0.0259	0.0101 0.0086	0.3256 -0.2189	0.2547 -0.1443	0.0308 0.0164
σ_{22}	0.1915 0.0025	0.0819 0.0238	0.0051 0.0047	0.2879 -0.1039	0.1692 -0.0259	0.0101 0.0086	0.3256 -0.2189	0.2547 -0.1443	0.0308 0.0164
σ_{12}	-0.0153 1.0591	-0.0122 0.5016	-0.0018 0.0308	-0.0470 1.3175	-0.0416 0.7795	-0.0116 0.0726	-0.0715 1.1320	-0.0722 0.8164	-0.0478 0.2006
σ_{13}	0.1016	0.0663	0.0074	0.1674	0.1403	0.0184	0.2110	0.2334	0.0667
σ_{23}	0.0902	0.0525	0.0004	0.1556	0.1177	0.0006	0.2057	0.2148	0.0081
σ_{33}	0.5826	0.5995	0.6688	0.5437	0.5158	0.7369	0.5743	0.5218	1.0124

Le varie grandezze sono state valutate lungo lo spessore nel modo seguente:

$(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$	in	$z = \pm h/2$
(w)	in	$z = 0$
(σ_{13})	in	$z = -h/8$
$(\sigma_{23}, \sigma_{33})$	in	$z = +h/8$

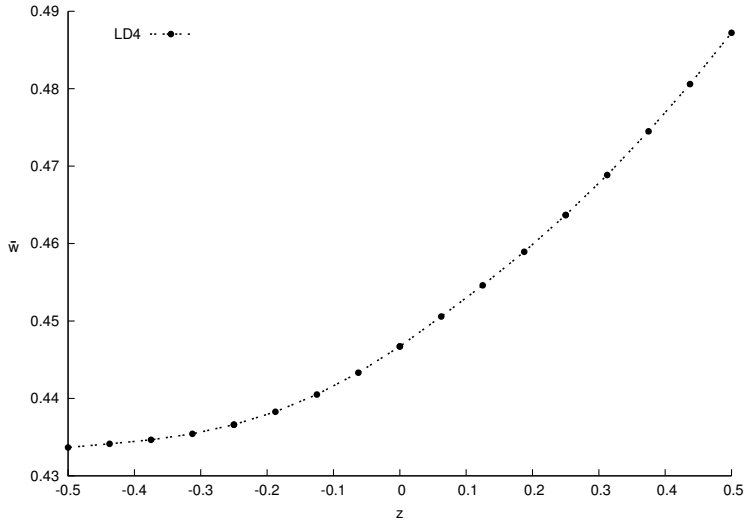

Figura 5.42: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 4

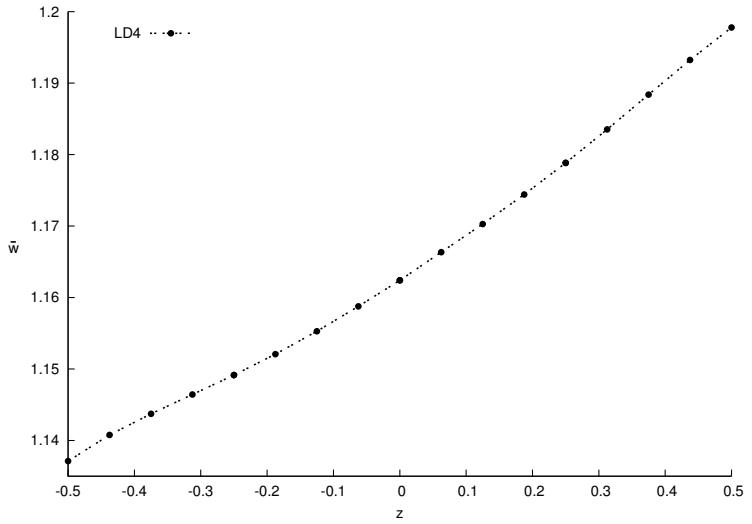

Figura 5.43: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 4

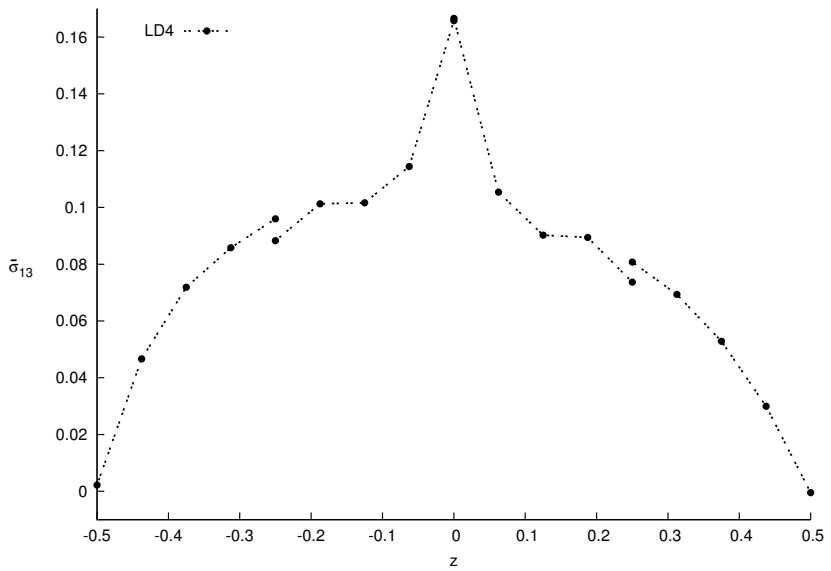

Figura 5.44: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 4

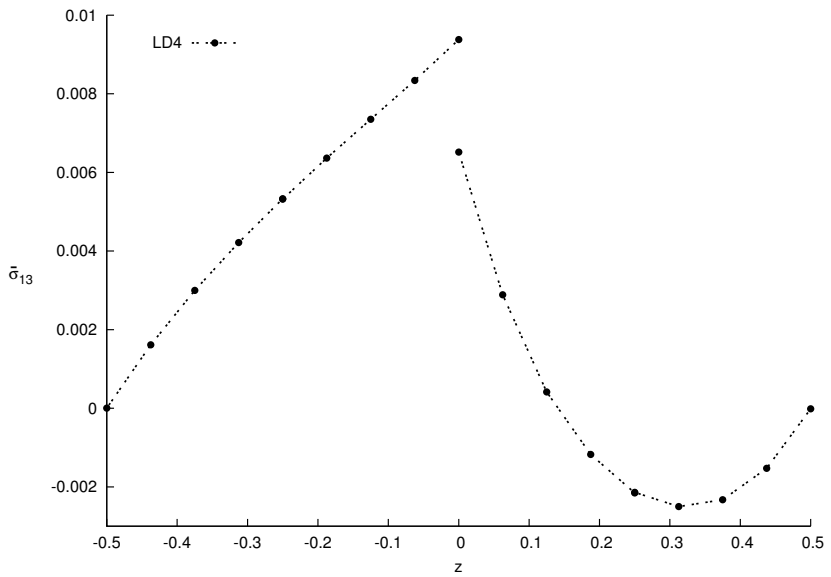

Figura 5.45: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione asimmetrica con strati N = 4

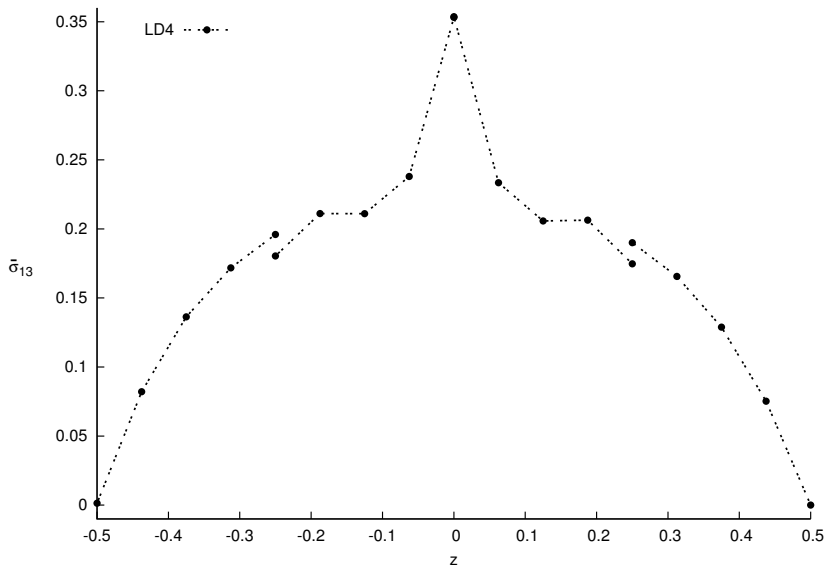

Figura 5.46: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 4

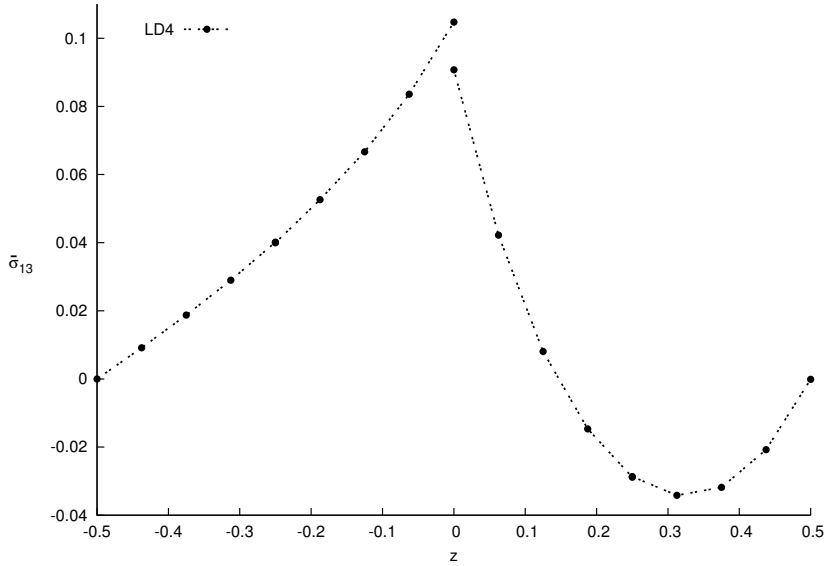

Figura 5.47: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione asimmetrica con strati N = 4

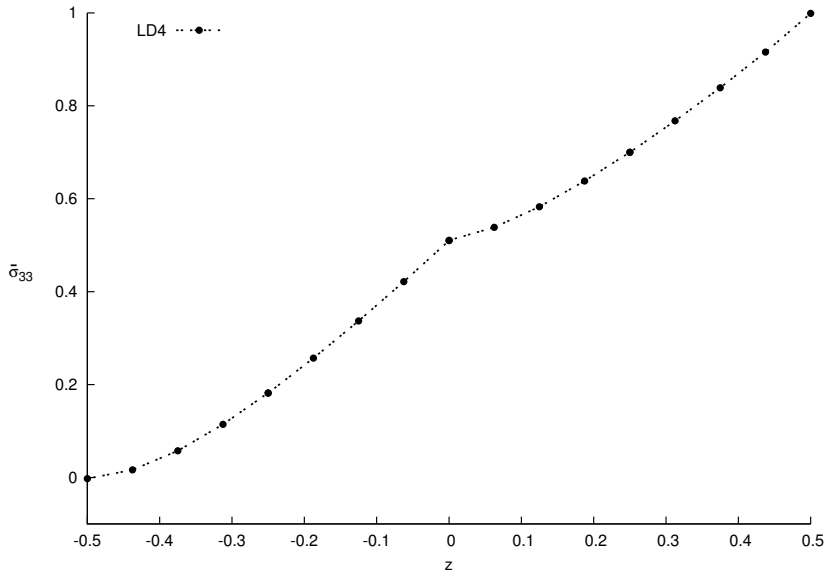

Figura 5.48: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 4

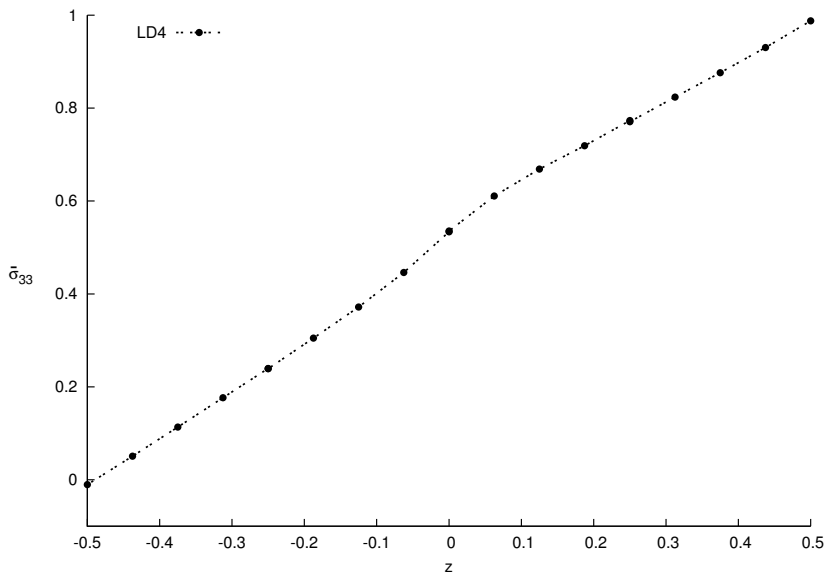

Figura 5.49: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione asimmetrica con strati N = 4

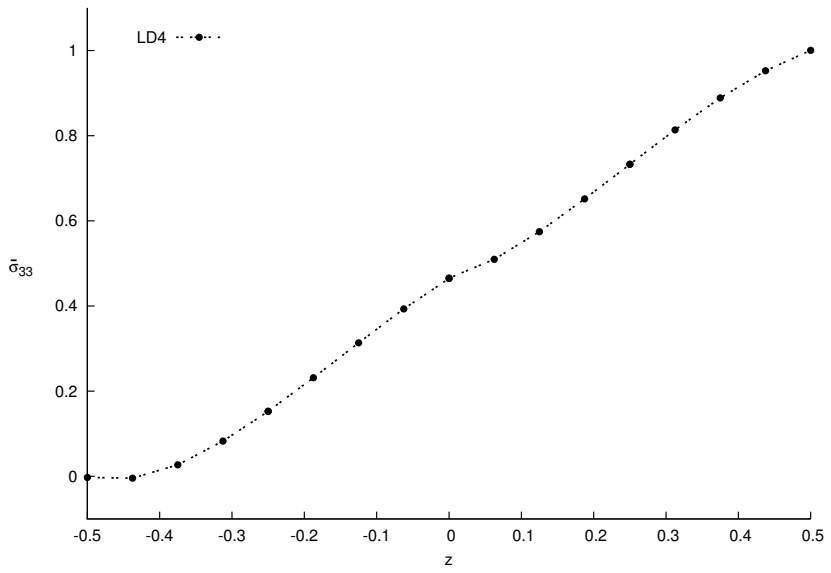

Figura 5.50: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 4

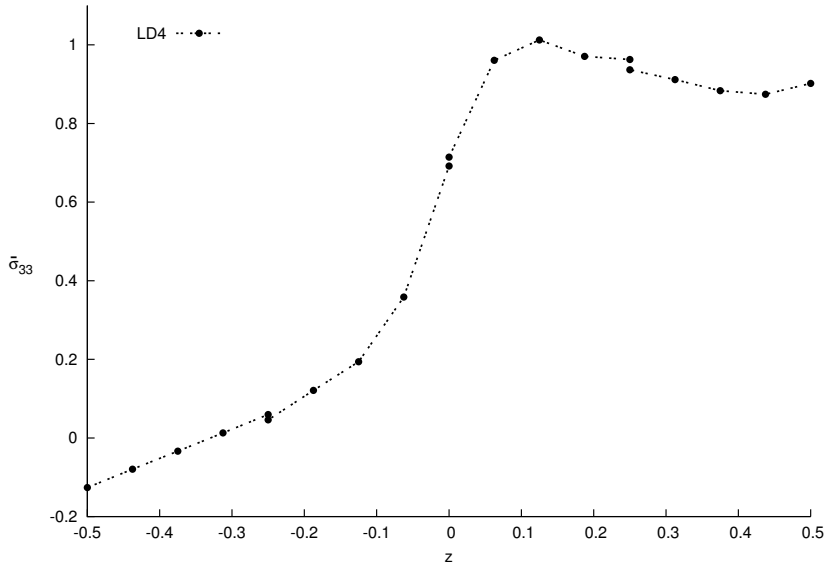

Figura 5.51: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione asimmetrica con strati N = 4

5.2.3 Laminazione asimmetrica $[45°/45°/45°/-45°/-45°/-45°]$, numero strati N = 6, semplicemente appoggiata,con carico bi-sinusoidale

Nei grafici dello spostamento verticale $\bar{\boldsymbol{w}}$ si nota che gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono dei cambiamenti di pendenza pronunciati e non lineari per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$), mentre per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono lineari.
Per quanto riguarda i grafici delle tensioni di taglio $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ si evince che gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità, va sottolineato il picco di tensione all'interfaccia tra i due strati. Sia per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$) che per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia. Nel caso di gusci sottili ($a/h = 100$) non si riesce ad ottenere la continuità all'interfaccia, si nota infatti il picco di tensione. Per risolvere questo problema bisognerebbe modellizzare a priori il profilo di tensione con un principio variazionale misto (RMVT).
Anche per i grafici delle tensioni di taglio $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ si nota che ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità. Sia per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$) che per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia. Per i gusci sottili ($a/h = 100$) è stata ottenuta una buona continuità all'interfaccia aumentando il numero di strati fittizi.

Tabella 5.28: Laminazione asimmetrica $[45°/45°/45°/-45°/-45°/-45°]$ con numero di strati $N = 6$, semplicemente appoggiata,con carico bi-sinusoidale. Teoria LD4 con $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
w	0.4476	0.1115	0.0009	0.8614	0.3017	0.0036	1.1633	0.5738	0.0236
σ_{11}	0.1917 0.0025	0.0819 0.0238	0.0051 0.0047	0.2881 -0.1040	0.1693 -0.0260	0.0101 0.0086	0.3256 -0.2190	0.2547 -0.1443	0.0308 0.0164
σ_{22}	0.1917 0.0025	0.0819 0.0238	0.0051 0.0047	0.2881 -0.1040	0.1693 -0.0260	0.0101 0.0086	0.3256 -0.2190	0.2547 -0.1443	0.0308 0.0164
σ_{12}	-0.0154 1.0585	-0.0120 0.5024	-0.0017 0.0308	-0.0473 1.3171	-0.0415 0.7804	-0.0115 0.0726	-0.0722 1.1315	-0.0723 0.8170	-0.0476 0.2007
σ_{13}	0.1074	0.0766	0.0081	0.1761	0.1628	0.0207	0.2220	0.2727	0.0780
σ_{23}	0.0967	0.0641	0.0019	0.1651	0.1427	0.0052	0.2168	0.2563	0.0290
σ_{33}	0.5515	0.5720	0.6319	0.5061	0.4884	0.7049	0.5296	0.4886	0.9962

Le varie grandezze sono state valutate lungo lo spessore nel modo seguente:

$(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$	in	$z = \pm h/2$
(w)	in	$z = 0$
(σ_{13})	in	$z = -h/12$
$(\sigma_{23}, \sigma_{33})$	in	$z = +h/12$

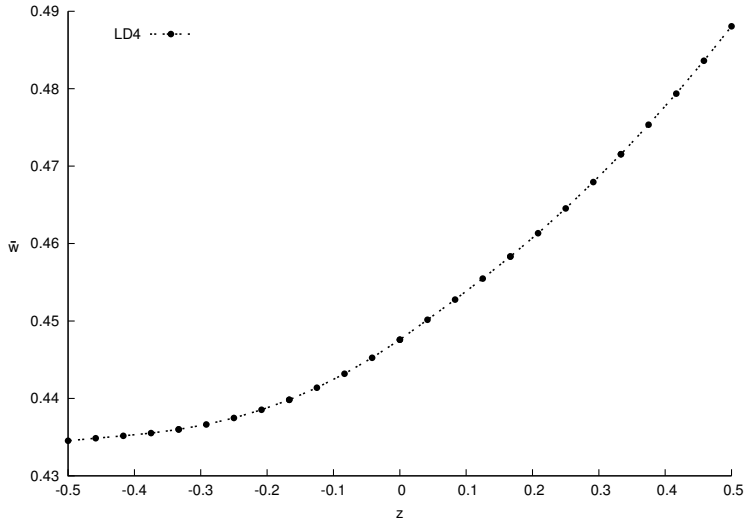

Figura 5.52: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 6

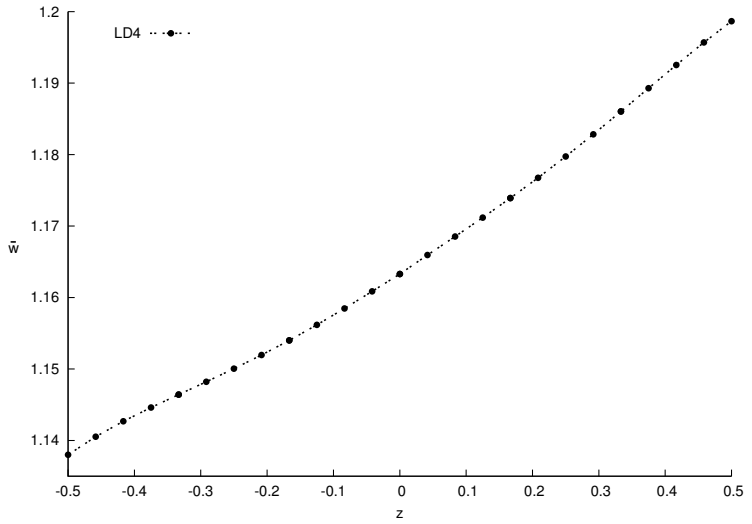

Figura 5.53: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 6

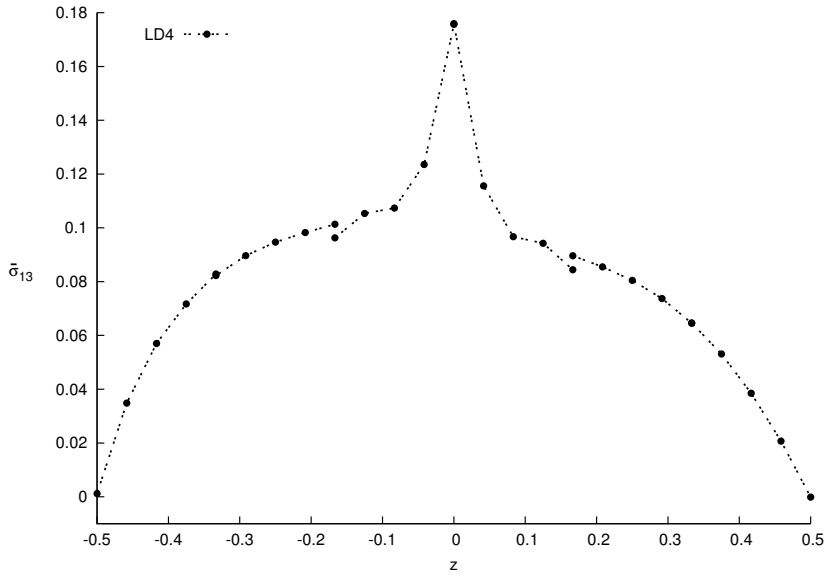

Figura 5.54: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 6

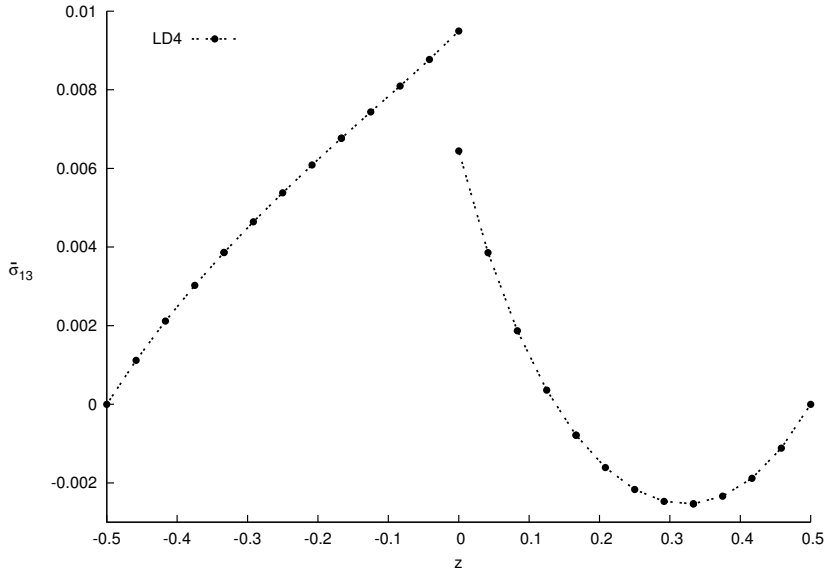

Figura 5.55: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione asimmetrica con strati N = 6

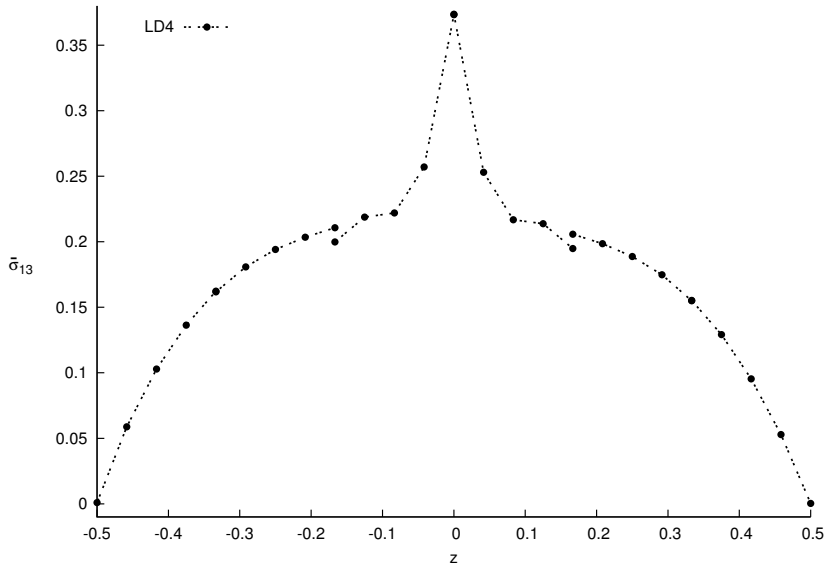

Figura 5.56: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 6

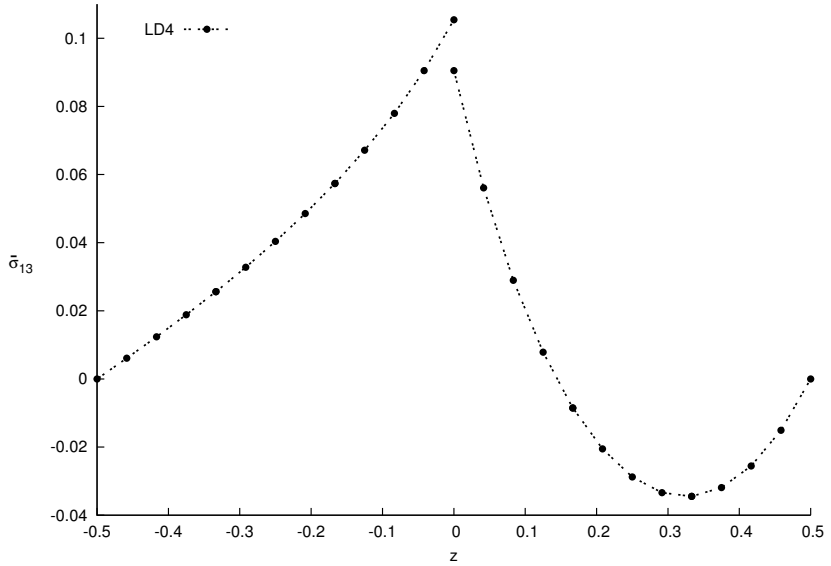

Figura 5.57: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione asimmetrica con strati N = 6

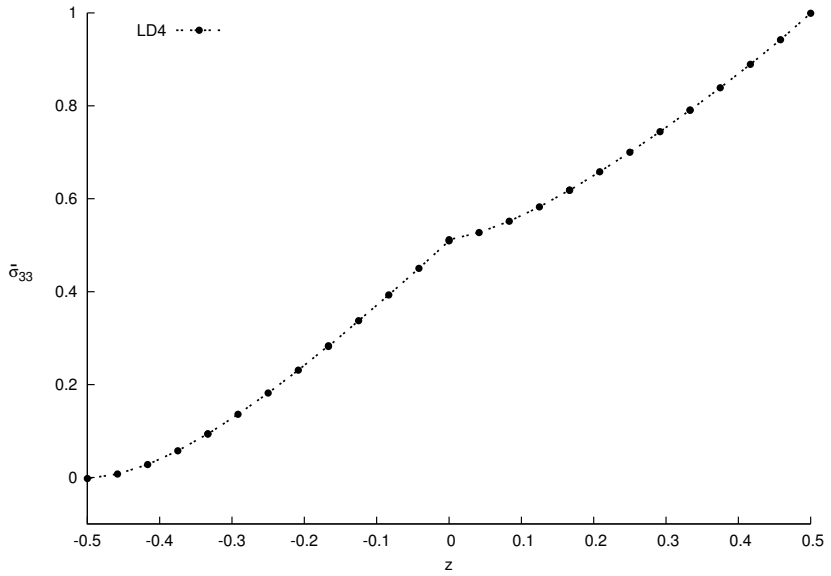

Figura 5.58: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 6

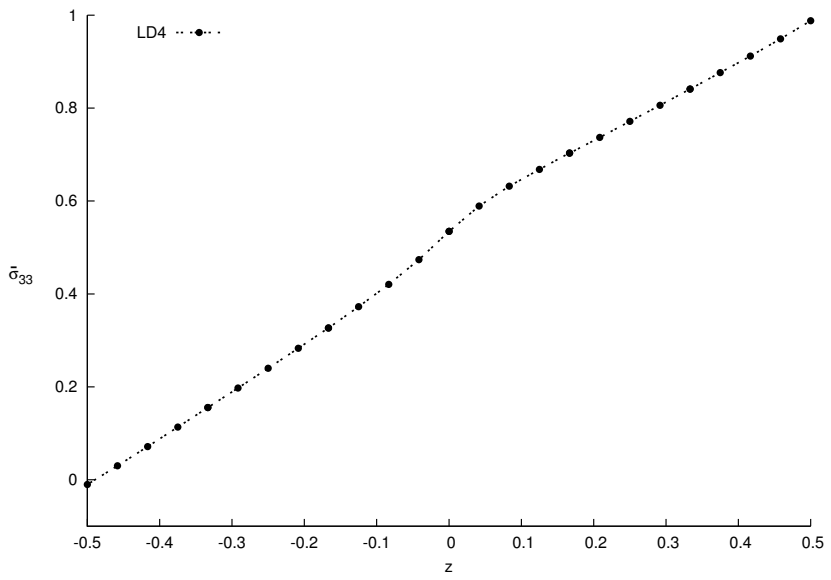

Figura 5.59: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione asimmetrica con strati N = 6

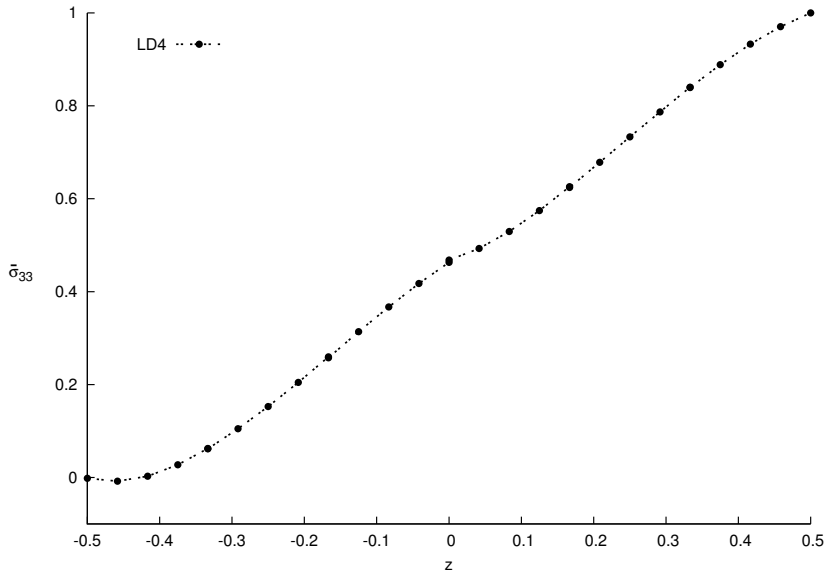

Figura 5.60: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione asimmetrica con strati N = 6

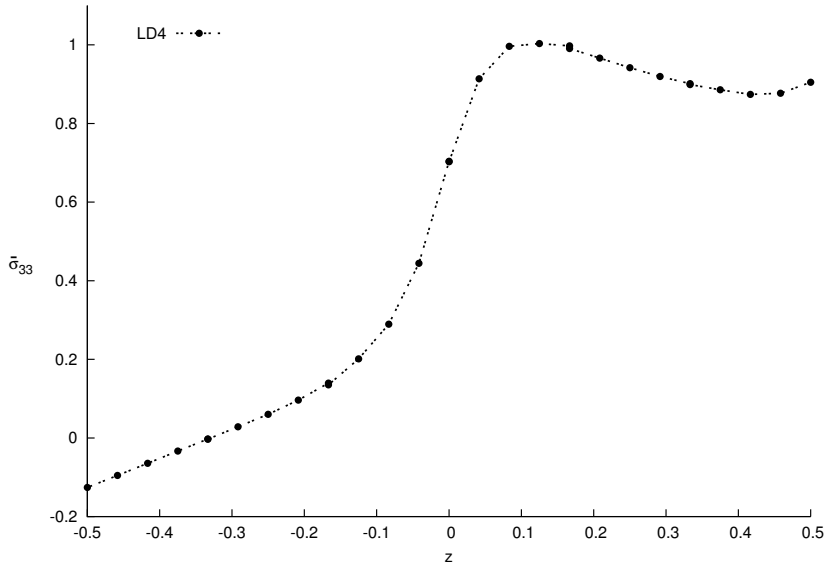

Figura 5.61: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione asimmetrica con strati N = 6

5.2.4 Laminazione simmetrica $[45°/-45°/45°]$, numero strati N = 3, semplicemente appoggiata,con carico bi-sinusoidale

Nei grafici dello spostamento verticale $\bar{\boldsymbol{w}}$ si nota che gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono dei cambiamenti di pendenza pronunciati e non lineari per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$), mentre per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono lineari.
Per quanto riguarda i grafici delle tensioni di taglio $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ si evince che gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità, sono da sottolineare i picchi di tensione alle interfacce degli strati. Non si riesce ad ottenere la continuità alle interfacce anche con teorie *layer wise*. Per risolvere questo problema bisognerebbe modellizzare a priori il profilo di tensione con un principio variazionale misto (RMVT) o inserire degli strati fittizi per migliorare l'approssimazione del profilo.
Anche per i grafici delle tensioni di taglio $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ si nota che ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità. Sia per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$) che per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia.

Tabella 5.29: Laminazione simmetrica $[45°/-45°/45°]$ con numero di strati $N = 3$, semplicemente appoggiata,con carico bi-sinusoidale. Teoria LD4 con $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
w	0.3994	0.0936	0.0009	0.8228	0.2589	0.0032	1.1811	0.5235	0.0182
σ_{11}	0.1793 0.0033	0.0769 0.0144	0.0050 0.0037	0.2730 -0.0837	0.1527 -0.0217	0.0111 0.0060	0.3140 -0.1977	0.2307 -0.1219	0.0330 0.0097
σ_{22}	0.1793 0.0033	0.0769 0.0144	0.0050 0.0037	0.2730 -0.0837	0.1527 -0.0217	0.0111 0.0060	0.3140 -0.1977	0.2307 -0.1219	0.0330 0.0097
σ_{12}	0.5130 0.8962	0.2132 0.3785	0.0111 0.0086	0.2457 1.2734	0.1397 0.7232	0.0201 0.0212	-0.3413 1.2249	-0.2781 0.9927	0.0248 0.0832
σ_{13}	0.0809	0.0451	0.0015	0.1382	0.0888	0.0049	0.1840	0.1452	0.0225
σ_{23}	0.0809	0.0451	0.0015	0.1382	0.0888	0.0049	0.1840	0.1452	0.0225
σ_{33}	0.4459	0.4145	0.4289	0.3979	0.3288	0.3715	0.4303	0.3462	0.3803

Le varie grandezze sono state valutate lungo lo spessore nel modo seguente:

$(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$ in $z = \pm h/2$
(w) in $z = 0$
$(\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33})$ in $z = 0$

Tabella 5.30: Laminazione simmetrica $[45°/-45°/45°]$ con numero di strati $N = 3$, semplicemente appoggiata,con carico bi-sinusoidale. Teoria EDZ3 con $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
w	0.3401	0.0834	0.0008	0.7451	0.2367	0.0032	1.1365	0.5040	0.0179
σ_{11}	0.1697 0.0132	0.0744 0.0164	0.0050 0.0037	0.2625 -0.0648	0.1474 -0.0143	0.0113 0.0061	0.3117 -0.1841	0.2286 -0.1123	0.0331 0.0101
σ_{22}	0.1697 0.0132	0.0744 0.0164	0.0050 0.0037	0.2625 -0.0648	0.1474 -0.0143	0.0113 0.0061	0.3117 -0.1841	0.2286 -0.1123	0.0331 0.0101
σ_{12}	0.5203 0.9850	0.1942 0.3644	0.0096 0.0075	0.3348 1.3632	0.1454 0.6901	0.0171 0.0185	-0.2579 1.3071	-0.2440 0.9737	0.0181 0.0753
σ_{13}	0.0761	0.0450	0.0009	0.1472	0.1035	0.0041	0.2133	0.1923	0.0233
σ_{23}	0.0761	0.0450	0.0009	0.1472	0.1035	0.0041	0.2133	0.1923	0.0233
σ_{33}	0.4668	0.4289	0.4474	0.4164	0.3519	0.3999	0.4371	0.3598	0.3724

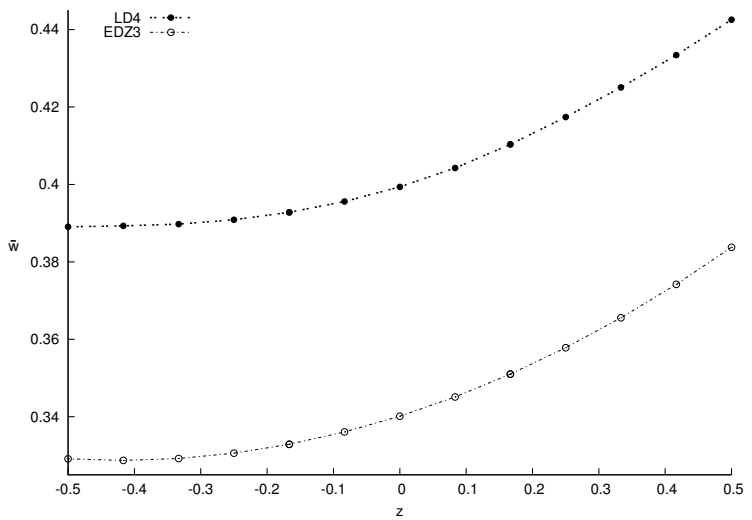

Figura 5.62: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

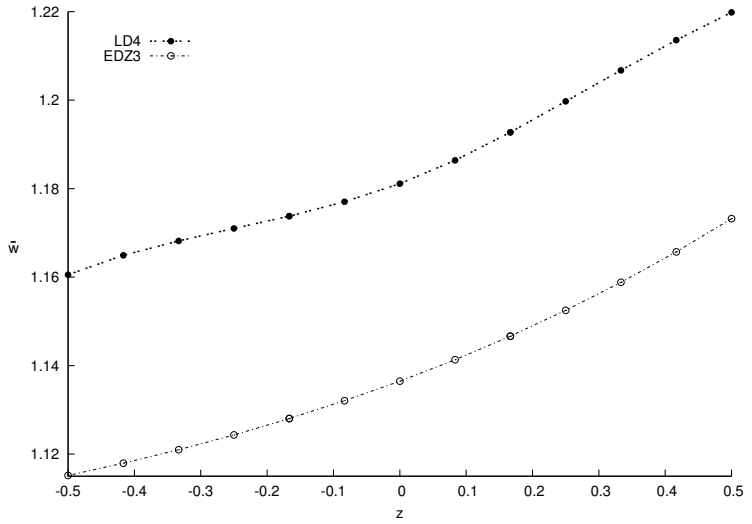

Figura 5.63: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

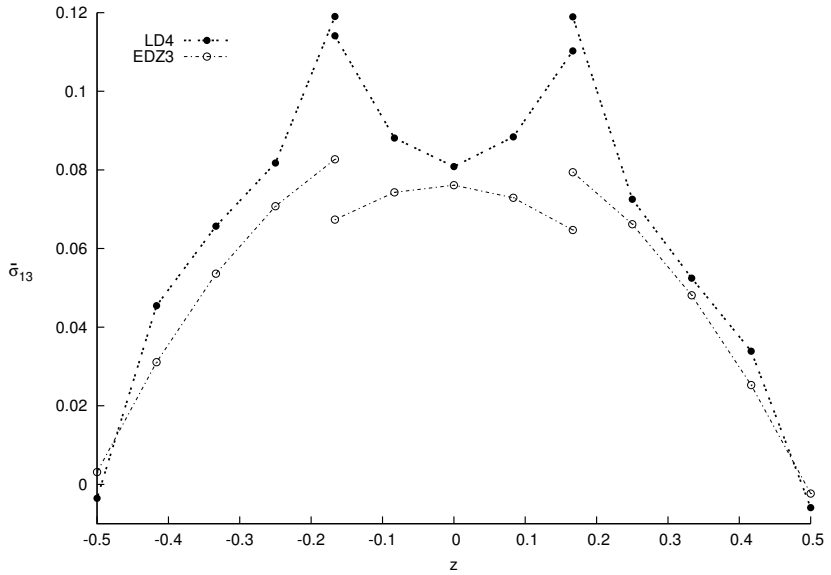

Figura 5.64: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

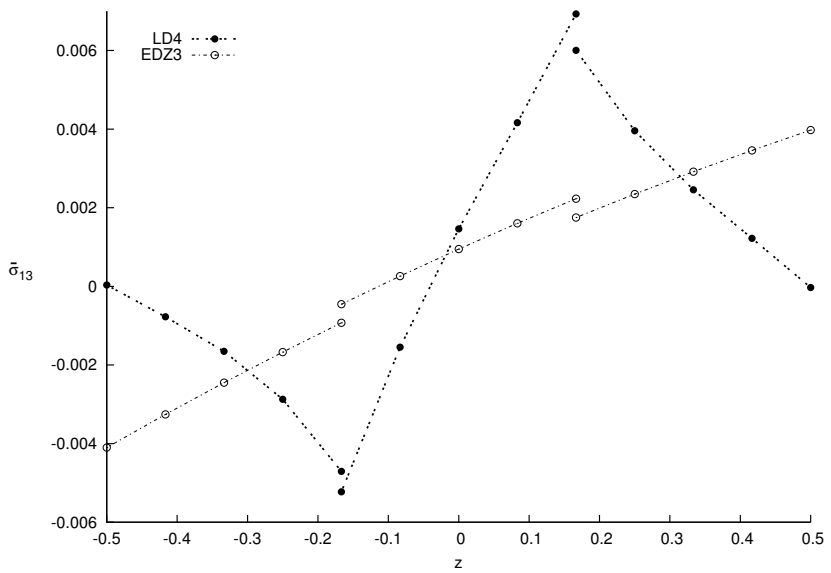

Figura 5.65: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

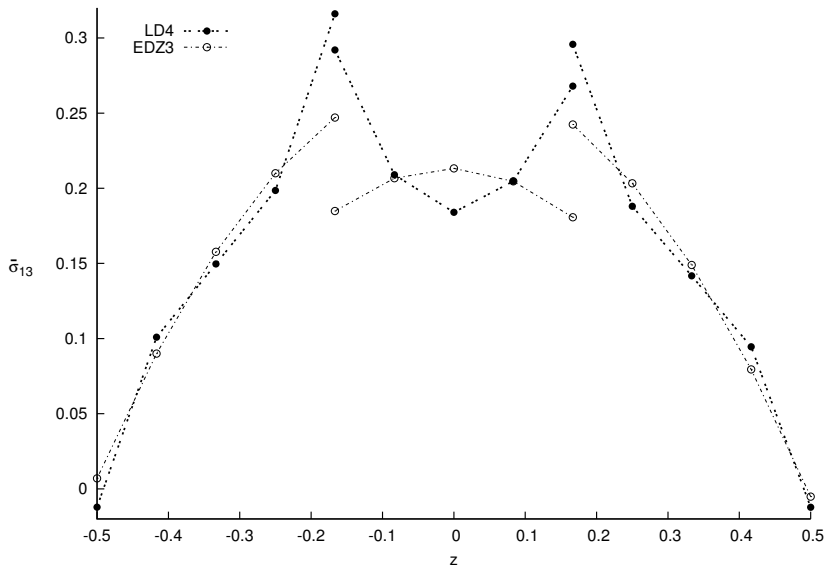

Figura 5.66: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

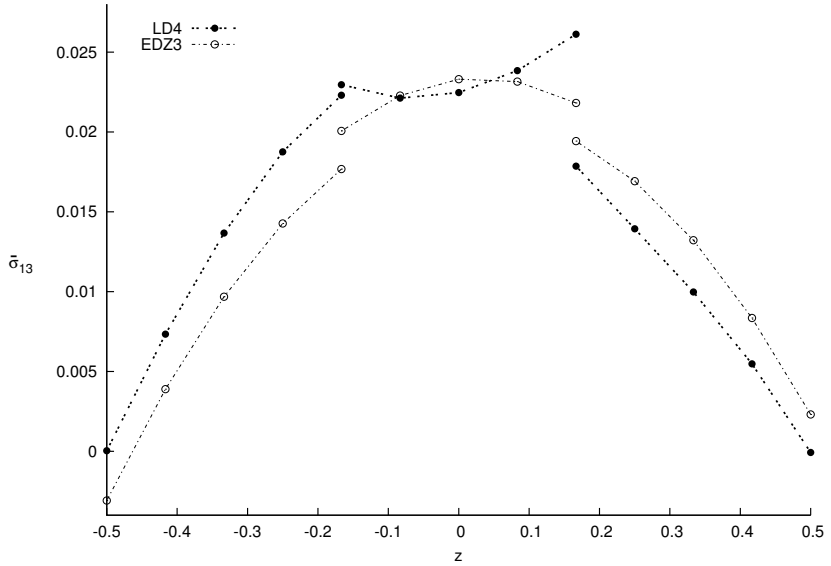

Figura 5.67: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

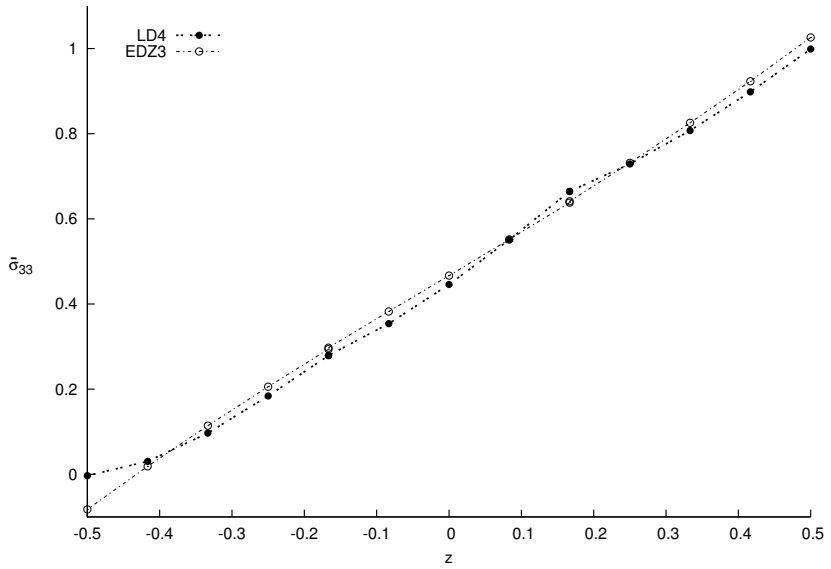

Figura 5.68: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

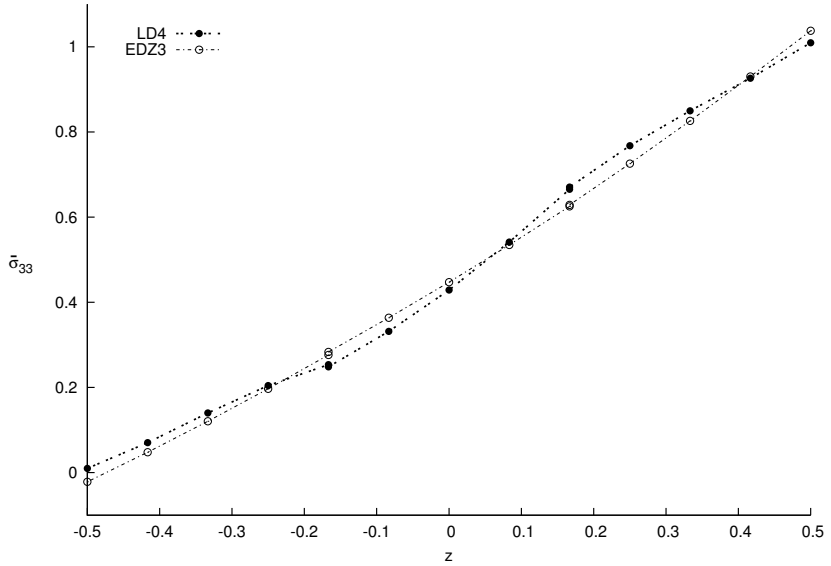

Figura 5.69: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

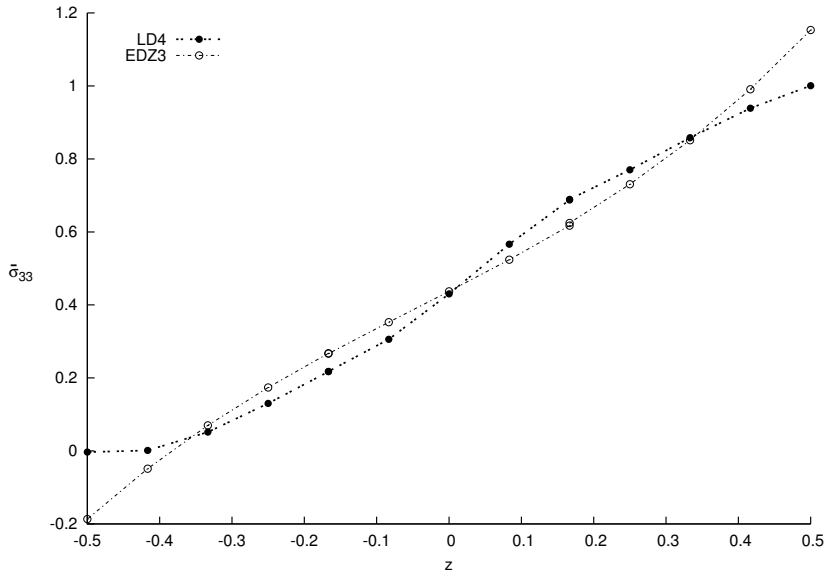

Figura 5.70: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

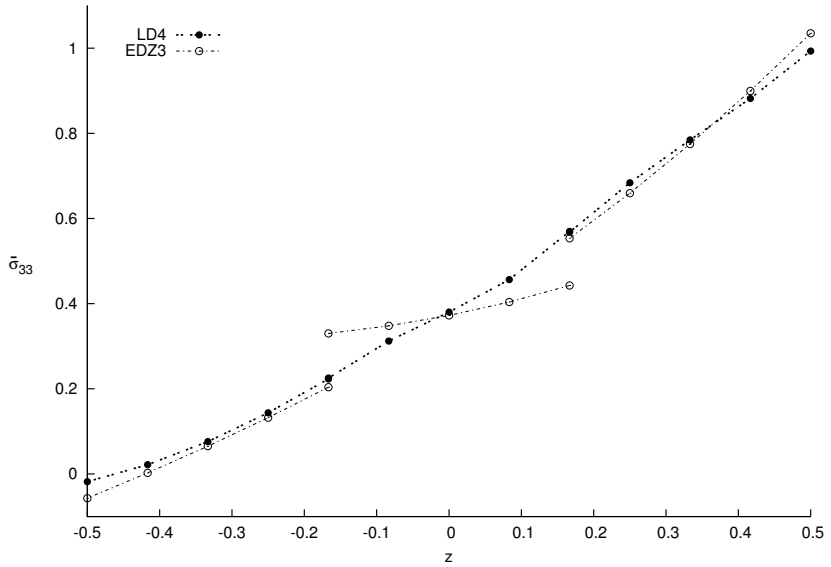

Figura 5.71: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

5.2.5 Laminazione simmetrica [0°/90°/0°], numero strati N = 3, incastrata su due lati paralleli e libera sugli altri due, con carico bi-sinusoidale

Nei grafici dello spostamento verticale $\bar{w}$ si nota che gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono dei cambiamenti di pendenza pronunciati e non linearità.
Per quanto riguarda i grafici delle tensioni di taglio $\bar{\sigma}_{13}$ si evince che la soluzione non è soddisfacente, probabilmente a causa delle forti non linearità del problema dovute alle nuove condizioni al contorno di vincolo. Non si riesce ad ottenere la continuità alle interfacce. Per risolvere questo problema bisognerebbe modellizzare a priori il profilo di tensione con un principio variazionale misto (RMVT).
Invece per i grafici delle tensioni di taglio $\bar{\sigma}_{33}$ si nota che ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità. Sia per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$) che per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia.

Tabella 5.31: Laminazione simmetrica [0°/90°/0°] con numero di strati $N = 3$, incastrata su due lati paralleli e libera sugli altri due, con carico bi-sinusoidale. Teoria LD4 con $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
w	0.3120	0.0819	0.0013	0.6495	0.1936	0.0042	1.0503	0.3617	0.0190
σ_{11}	0.3730	0.1747	0.0166	0.5077	0.2789	0.0359	0.5628	0.3536	0.0929
	0.0530	0.0326	0.0069	-0.0208	-0.0034	0.0099	-0.2287	-0.1384	0.0058
σ_{22}	0.0252	0.0082	0.0004	0.0353	0.0138	0.0008	0.0434	0.0206	0.0022
	-0.0085	-0.0024	0.0002	-0.0192	-0.0077	0.0001	-0.0296	-0.0155	-0.0006
σ_{12}	0.0020	0.0006	-0.0003	0.0007	0.0007	0.0000	-0.0049	-0.0021	0.0006
	0.0090	0.0029	-0.0002	0.0155	0.0065	0.0002	0.0169	0.0085	0.0009
σ_{13}	0.0046	-0.0058	-0.0533	0.0608	0.0503	-0.0594	0.1268	0.1368	-0.0106
σ_{23}	-0.0002	-0.0051	-0.0071	0.0036	-0.0029	-0.0065	0.0064	-0.0016	-0.0068
σ_{33}	0.4862	0.4247	0.3949	0.4636	0.3951	0.3522	0.4701	0.4187	0.2962

Tabella 5.32: Laminazione simmetrica [0°/90°/0°] con numero di strati $N = 3$, incastrata su due lati paralleli e libera sugli altri due, con carico bi-sinusoidale. Teoria EDZ3 con $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
w	0.3086	0.0816	0.0013	0.6438	0.1934	0.0042	1.0357	0.3604	0.0190
σ_{11}	0.3698 0.0586	0.1744 0.0329	0.0166 0.0070	0.5043 -0.0195	0.2789 -0.0043	0.0359 0.0099	0.5581 -0.2281	0.3538 -0.1400	0.0928 0.0058
σ_{22}	0.0247 -0.0083	0.0081 -0.0024	0.0004 0.0002	0.0354 -0.0198	0.0140 -0.0079	0.0008 0.0001	0.0441 -0.0307	0.0209 -0.0159	0.0022 -0.0006
σ_{12}	0.0021 0.0094	0.0006 0.0029	-0.0003 -0.0002	0.0007 0.0159	0.0008 0.0065	0.0000 0.0002	-0.0051 0.0174	-0.0020 0.0085	0.0006 0.0009
σ_{13}	0.0027	-0.0062	-0.0537	0.0570	0.0477	-0.0597	0.1197	0.1301	-0.0106
σ_{23}	-0.0020	-0.0045	-0.0055	0.0005	-0.0028	-0.0049	0.0019	-0.0018	-0.0048
σ_{33}	0.4925	0.4269	0.3919	0.4708	0.3988	0.3485	0.4746	0.4216	0.2920

Le varie grandezze sono state valutate lungo lo spessore nel modo seguente:

$(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$	in	$z = \pm h/2$
(w)	in	$z = 0$
$(\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33})$	in	$z = 0$

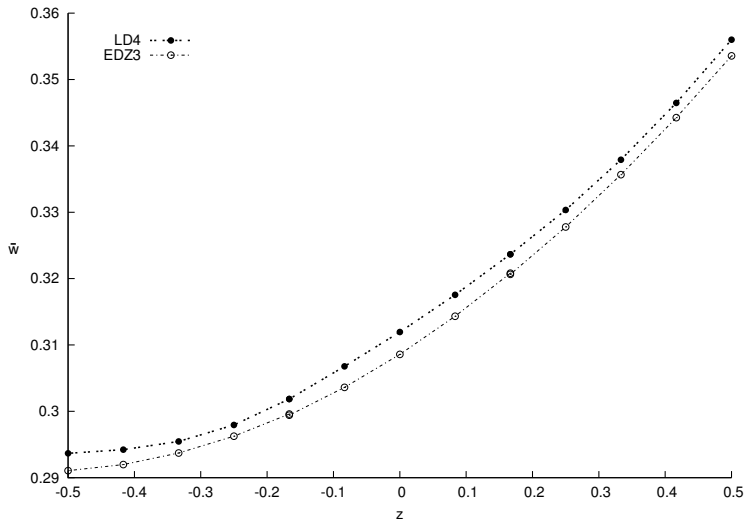

Figura 5.72: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

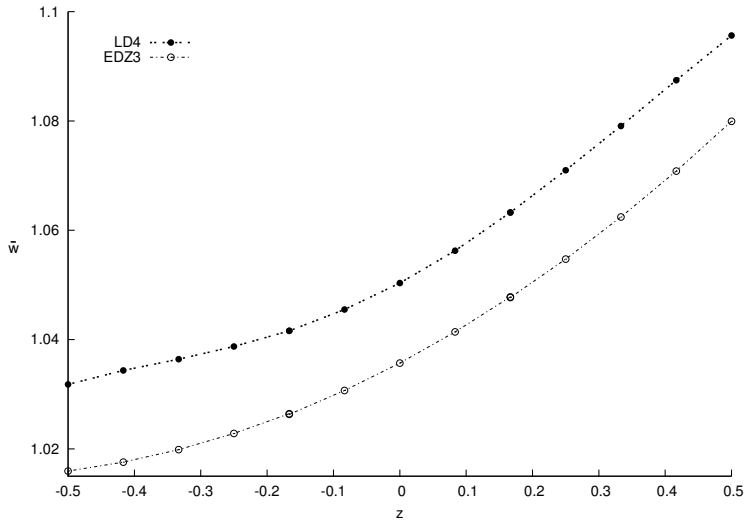

Figura 5.73: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

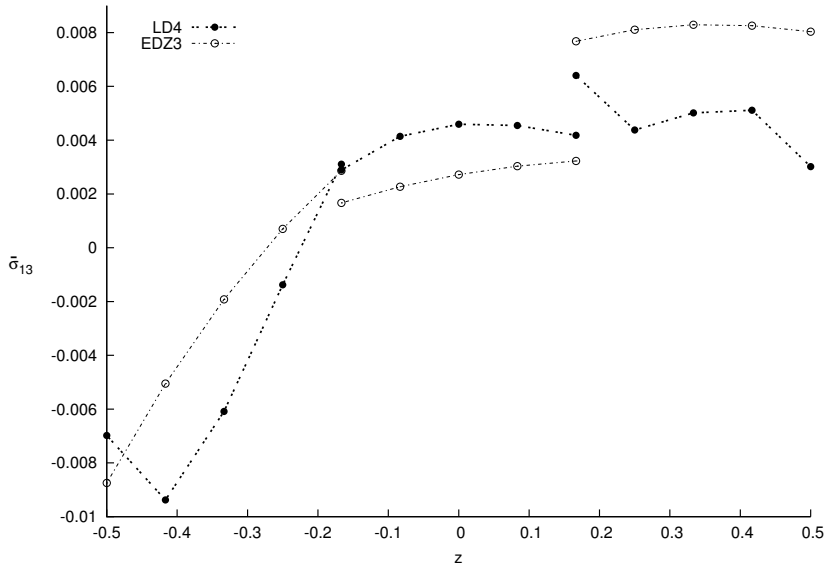

Figura 5.74: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

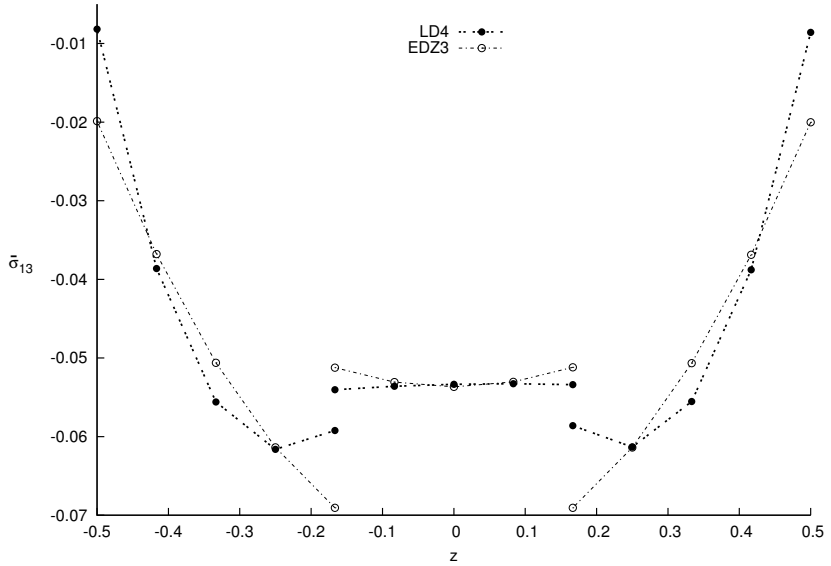

Figura 5.75: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

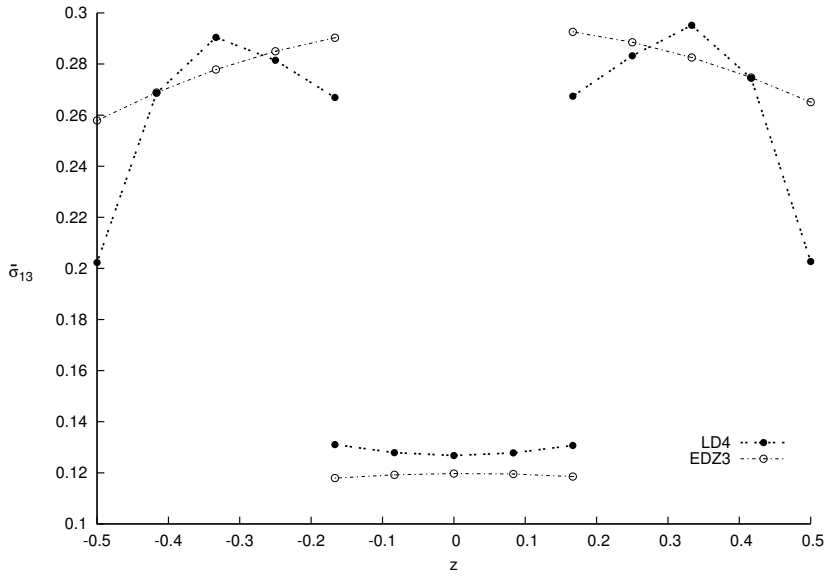

Figura 5.76: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

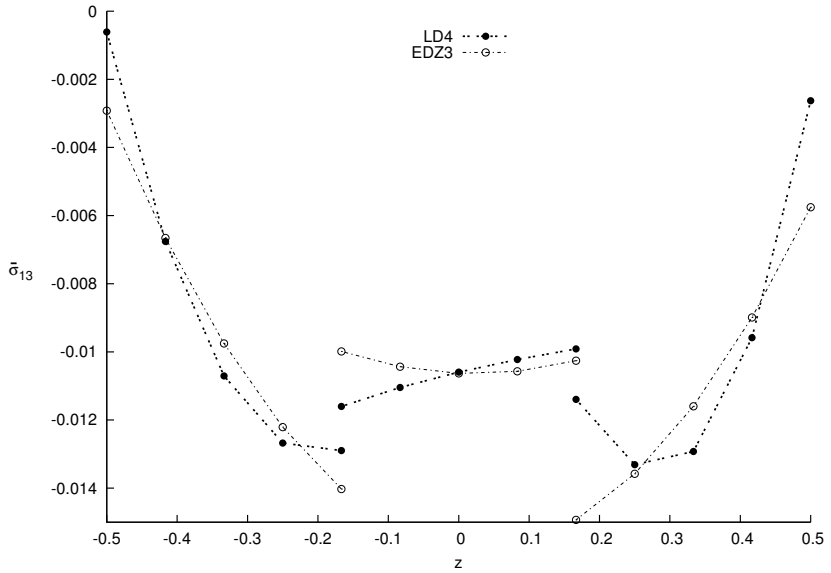

Figura 5.77: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

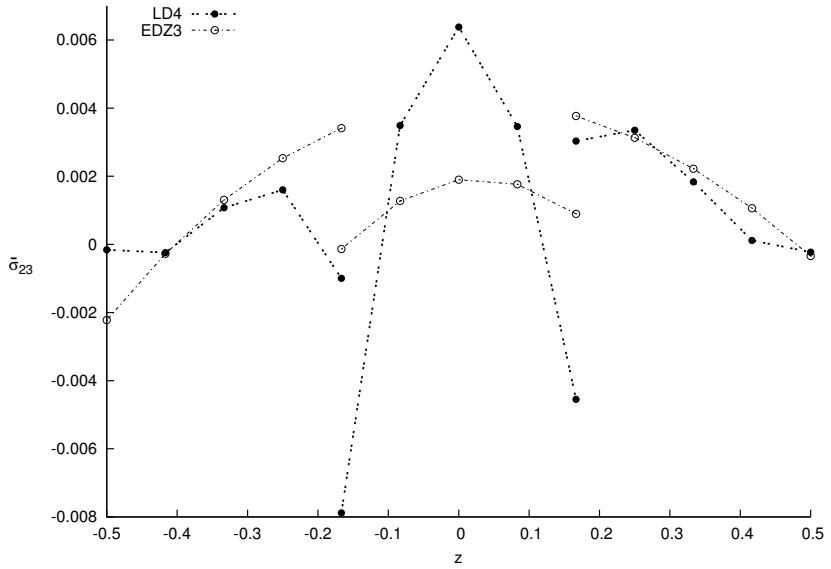

Figura 5.78: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{23}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

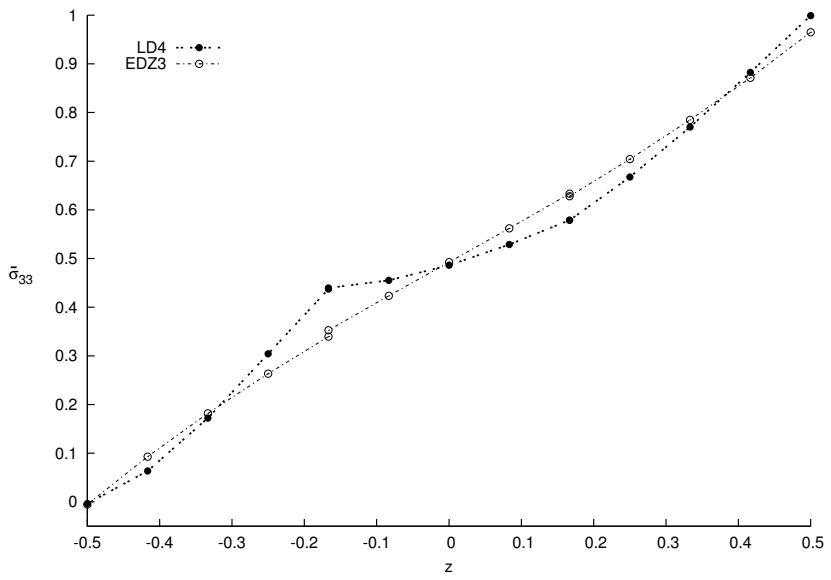

Figura 5.79: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

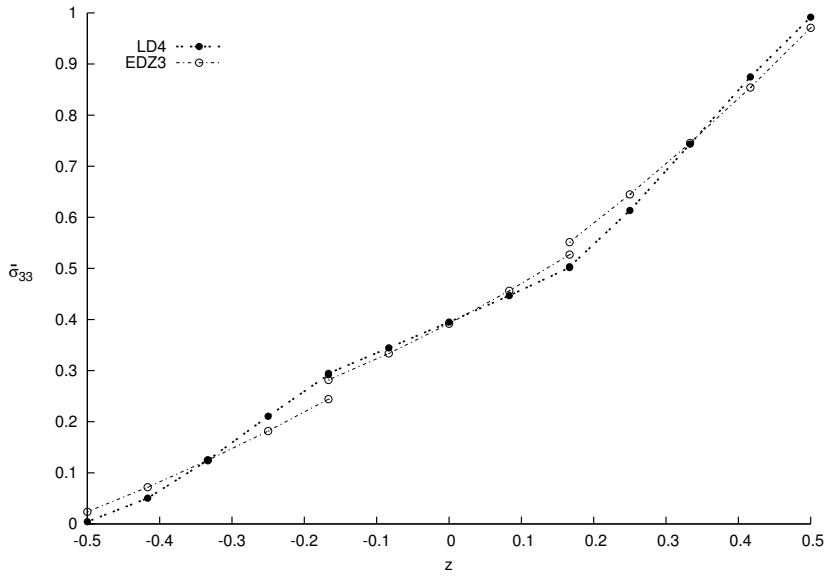

Figura 5.80: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

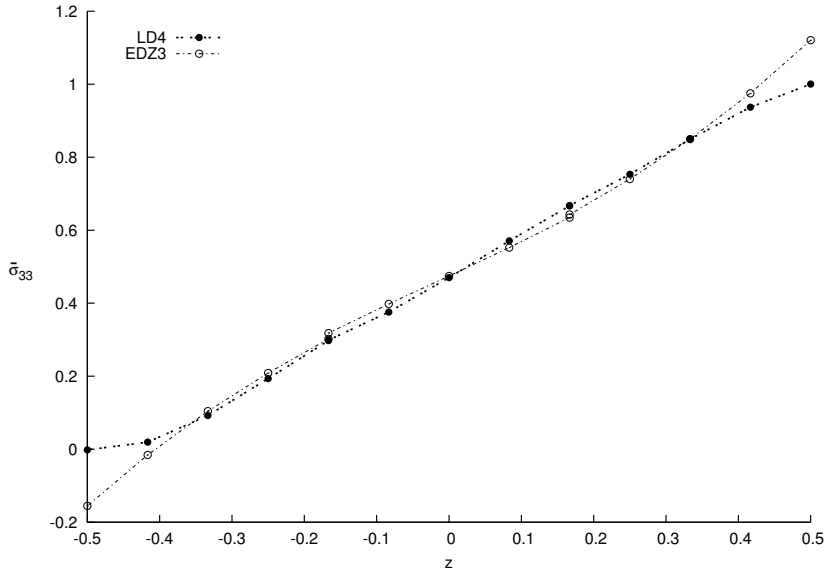

Figura 5.81: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

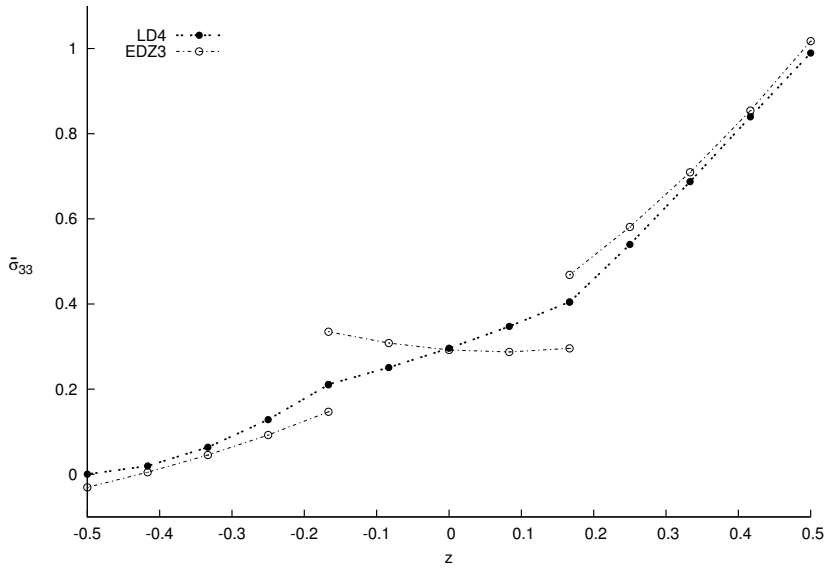

Figura 5.82: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

5.2.6 Laminazione simmetrica [0°/0°/90°/90°/0°/0°], numero strati N = 6, incastrata su due lati paralleli e libera sugli altri due, con carico bi-sinusoidale

Nei grafici dello spostamento verticale $\bar{w}$ si nota che gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono dei cambiamenti di pendenza pronunciati e non linearità.
Per quanto riguarda i grafici delle tensioni di taglio $\bar{\sigma}_{13}$ si evince che la soluzione non è soddisfacente, probabilmente a causa delle forti non linearità del problema dovute alle nuove condizioni al contorno di vincolo. Non si riesce ad ottenere la continuità alle interfacce nonostante l'inserimento di strati fittizi per aumentare l'accuratezza descrittiva del profilo di tensione. Per risolvere questo problema bisognerebbe modellizzare a priori il profilo di tensione con un principio variazionale misto (RMVT).
Invece per i grafici delle tensioni di taglio $\bar{\sigma}_{33}$ si nota che ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità. Sia per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$) che per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia.

Tabella 5.33: Laminazione simmetrica [0°/0°/90°/90°/0°/0°] con numero di strati $N = 6$, incastrata su due lati paralleli e libera sugli altri due, con carico bi-sinusoidale. Teoria LD4 con $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
w	0.3119	0.0819	0.0013	0.6495	0.1936	0.0042	1.0508	0.3618	0.0190
σ_{11}	0.3731 0.0531	0.1748 0.0326	0.0166 0.0069	0.5077 -0.0206	0.2787 -0.0032	0.0359 0.0099	0.5627 -0.2283	0.3530 -0.1378	0.0929 0.0058
σ_{22}	0.0252 -0.0084	0.0082 -0.0024	0.0004 0.0002	0.0353 -0.0192	0.0138 -0.0077	0.0008 0.0001	0.0434 -0.0296	0.0206 -0.0155	0.0022 -0.0006
σ_{12}	0.0020 0.0090	0.0006 0.0029	-0.0003 -0.0002	0.0007 0.0155	0.0007 0.0065	0.0000 0.0002	-0.0049 0.0170	-0.0021 0.0085	0.0006 0.0009
σ_{13}	-0.0015	-0.0188	-0.0618	0.1363	0.1078	-0.0681	0.2923	0.2986	-0.0126
σ_{23}	-0.0009	-0.0025	-0.0020	0.0011	-0.0008	-0.0019	0.0033	0.0014	-0.0016
σ_{33}	0.6672	0.6347	0.6140	0.6986	0.6565	0.5755	0.7532	0.7381	0.5398

Le varie grandezze sono state valutate lungo lo spessore nel modo seguente:

$(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$	in	$z = \pm h/2$
(w)	in	$z = 0$
(σ_{13})	in	$z = -h/4$
$(\sigma_{23}, \sigma_{33})$	in	$z = +h/4$

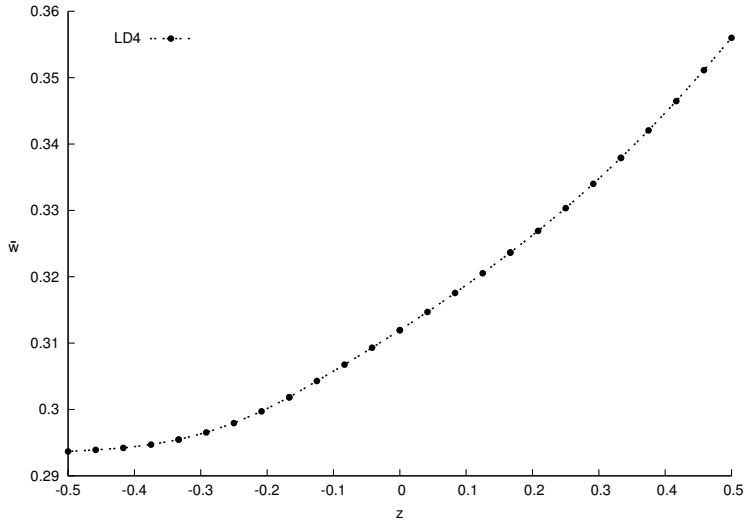

Figura 5.83: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

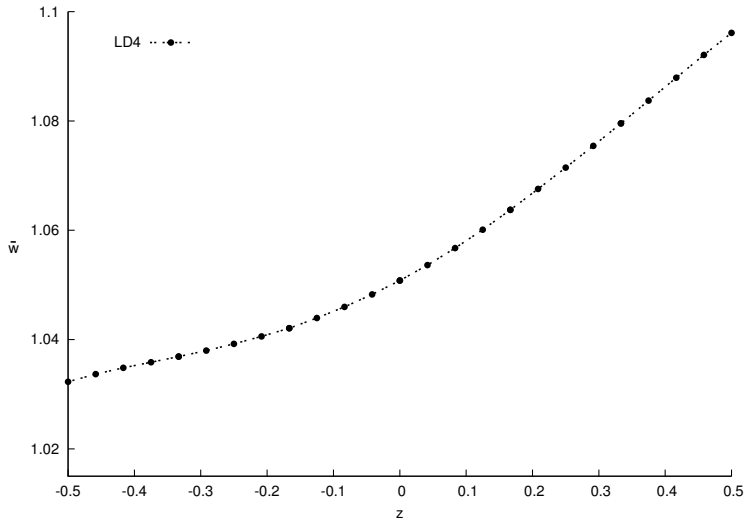

Figura 5.84: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

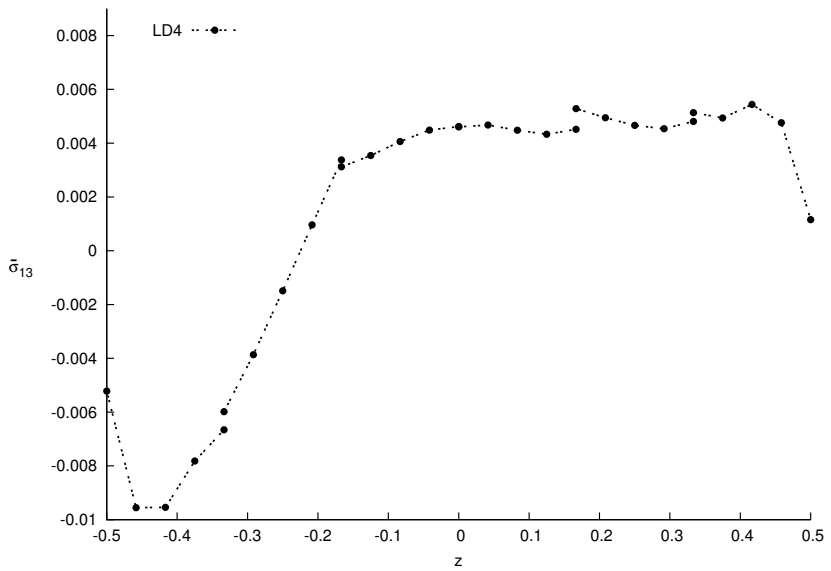

Figura 5.85: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

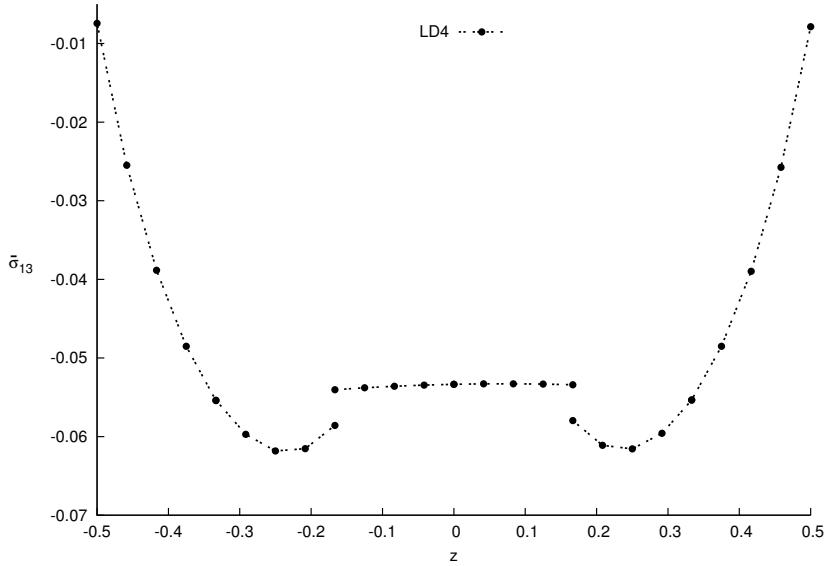

Figura 5.86: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

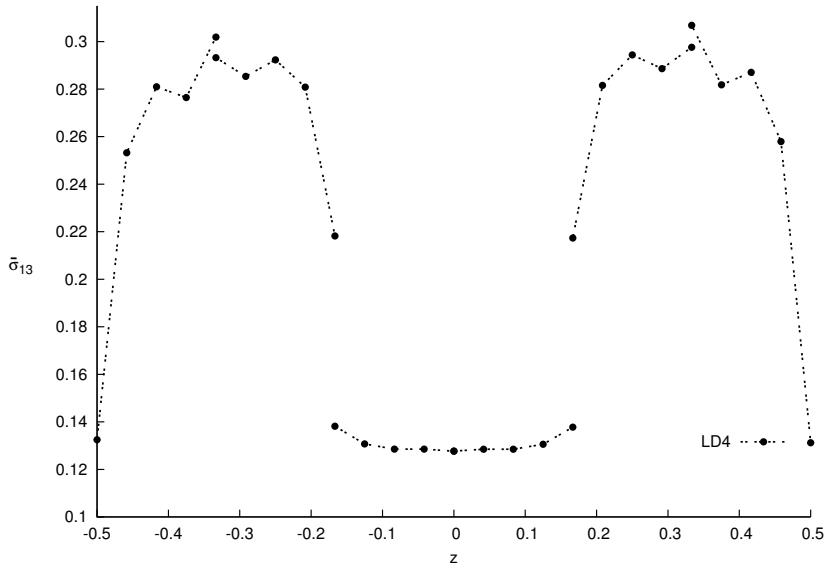

Figura 5.87: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

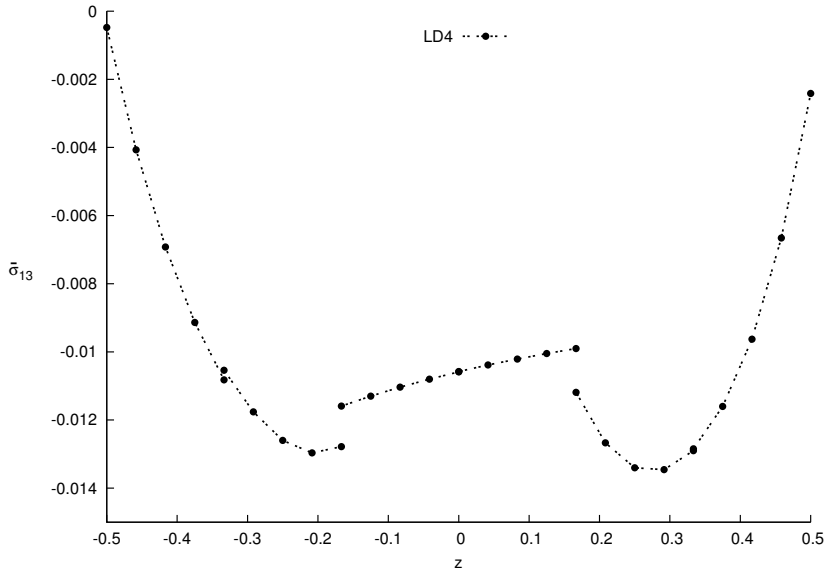

Figura 5.88: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

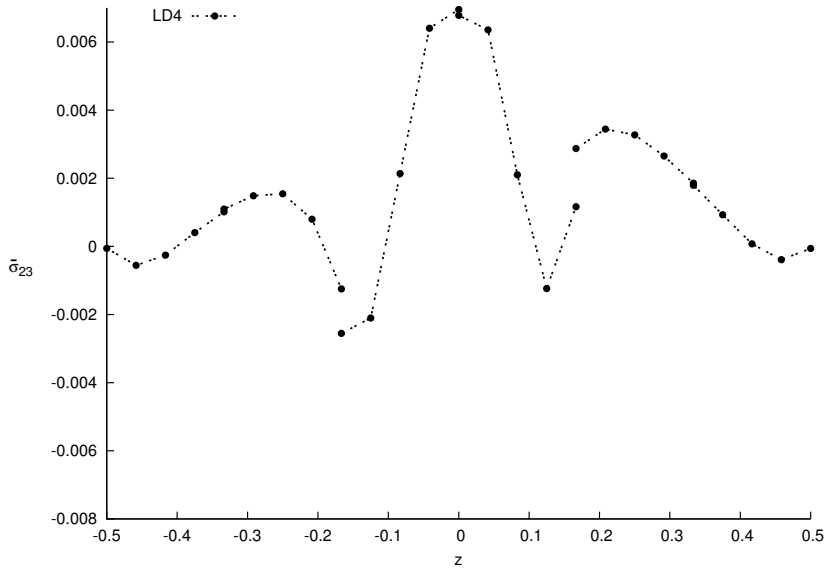

Figura 5.89: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{23}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

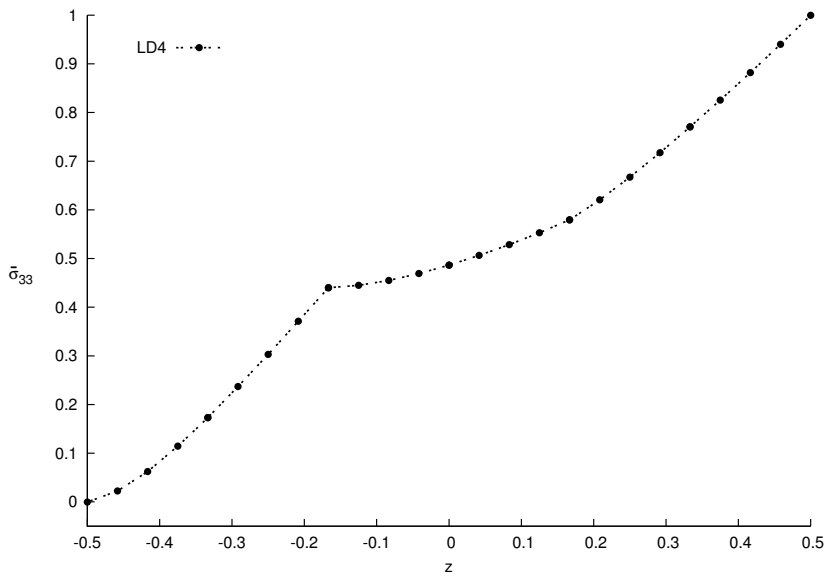

Figura 5.90: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

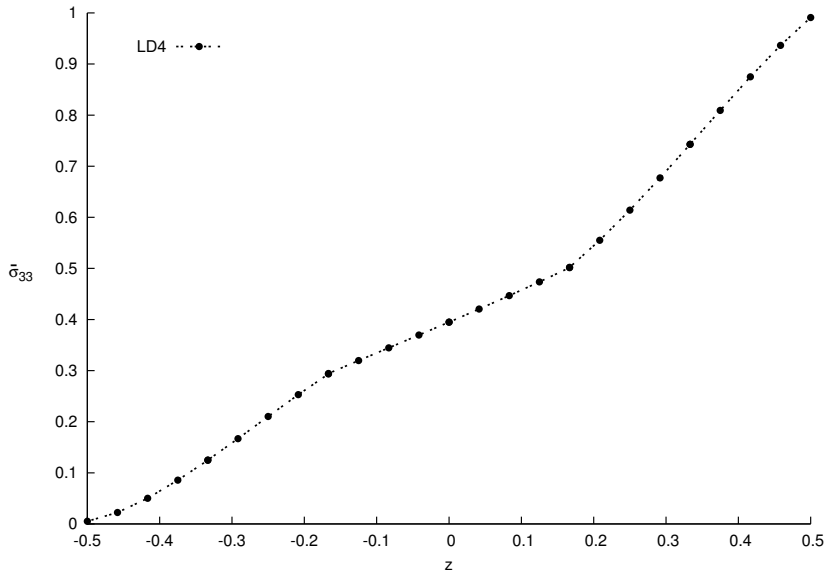

Figura 5.91: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

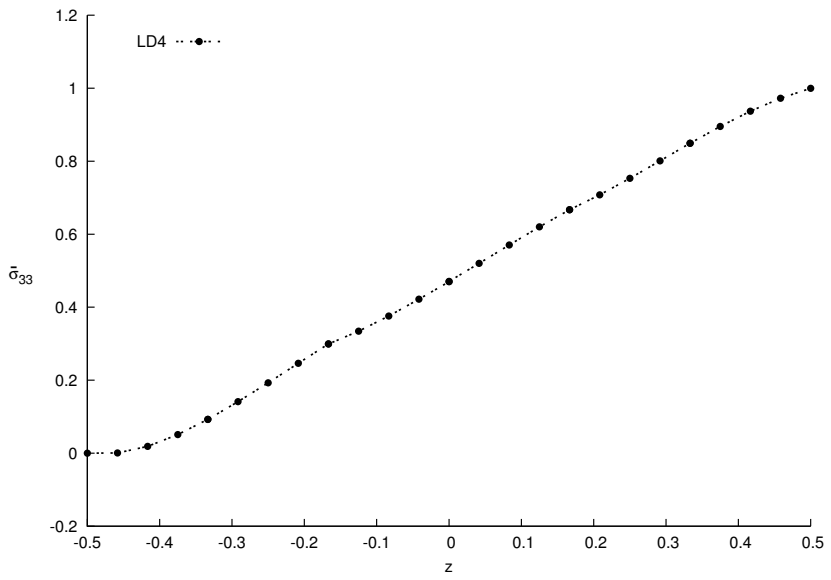

Figura 5.92: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

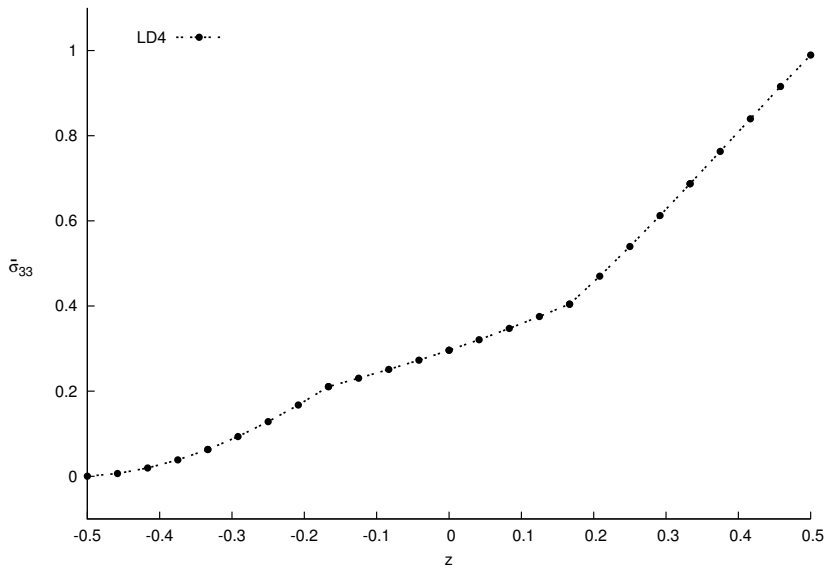

Figura 5.93: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

5.2.7 Laminazione simmetrica [90°/0°/90°], numero strati N = 3, semplicemente appoggiata,con carico concentrato in mezzeria

Nei grafici dello spostamento verticale $\bar{w}$ si nota che gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono dei cambiamenti di pendenza pronunciati e non linearità.
Per quanto riguarda i grafici delle tensioni di taglio $\bar{\sigma}_{13}$ si evince che la soluzione non è soddisfacente, probabilmente a causa delle forti non linearità del problema dovute alle nuove condizioni al contorno di carico. Non si riesce ad ottenere la continuità alle interfacce. Per risolvere questo problema bisognerebbe modellizzare a priori il profilo di tensione con un principio variazionale misto (RMVT) o inserire degli strati fittizi.
Invece per i grafici delle tensioni di taglio $\bar{\sigma}_{33}$ si nota che ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità. Sia per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$) che per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia.

Tabella 5.34: Laminazione simmetrica [90°/0°/90°] con numero di strati $N = 3$, semplicemente appoggiata,con carico concentrato in mezzeria. Teoria LD4 con $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
w	35.5325	3.2311	0.0012	43.2458	4.5584	0.0027	46.3985	5.3011	0.0083
σ_{11}	24.2503 -2.8425	1.9534 -0.5929	0.0016 -0.0012	26.3473 -3.4261	2.1076 -0.7218	0.0023 -0.0018	27.5621 -3.6664	2.1819 -0.7917	0.0034 -0.0029
σ_{22}	118.7555 -21.8729	11.0149 -4.5229	0.0186 -0.0108	126.3421 -26.4763	12.1289 -5.8645	0.0243 -0.0153	129.8474 -28.2425	12.6450 -6.6601	0.0334 -0.0239
σ_{12}	0.2677 1.1584	0.0688 0.1536	0.0001 0.0001	-0.0896 1.0927	0.0261 0.1823	0.0002 0.0003	-0.4274 0.8786	-0.0471 0.1542	0.0005 0.0007
σ_{13}	-0.4565	-0.3134	-0.0004	0.1817	-0.2933	-0.0005	0.4610	-0.2484	-0.0016
σ_{23}	2.6531	0.3455	-0.0020	4.1733	0.9675	-0.0054	4.7803	1.3297	-0.0033
σ_{33}	1.7344	0.9908	0.0158	1.7691	1.0137	0.0173	1.8048	1.0405	0.0187

Tabella 5.35: Laminazione simmetrica [90°/0°/90°] con numero di strati $N = 3$, semplicemente appoggiata,con carico concentrato in mezzeria. Teoria EDZ3 con $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
w	44.5572	3.4524	0.0012	52.3138	4.7799	0.0027	55.3513	5.5174	0.0083
σ_{11}	2.7441 -1.9305	0.6188 -0.5394	0.0015 -0.0012	3.1308 -2.7261	0.7271 -0.6768	0.0022 -0.0018	3.2284 -3.0666	0.7726 -0.7500	0.0033 -0.0029
σ_{22}	24.1870 -23.6627	5.5227 -4.7400	0.0185 -0.0108	28.6791 -28.5418	6.6365 -6.1163	0.0242 -0.0153	30.4400 -30.4103	7.1583 -6.9252	0.0333 -0.0239
σ_{12}	0.2760 1.1870	0.0693 0.1548	0.0001 0.0001	-0.0900 1.1160	0.0263 0.1837	0.0002 0.0003	-0.4338 0.8926	-0.0474 0.1553	0.0005 0.0007
σ_{13}	-0.5844	-0.2453	-0.0002	-0.0130	-0.2222	-0.0003	0.2405	-0.1814	-0.0011
σ_{23}	2.4564	0.3124	-0.0021	4.1360	0.9578	-0.0054	4.8160	1.3326	-0.0034
σ_{33}	-0.1365	-0.0688	-0.0045	-0.0871	-0.0484	-0.0031	-0.0378	-0.0224	-0.0018

Le varie grandezze sono state valutate lungo lo spessore nel modo seguente:

$(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$	in	$z = \pm h/2$
(w)	in	$z = 0$
$(\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33})$	in	$z = 0$

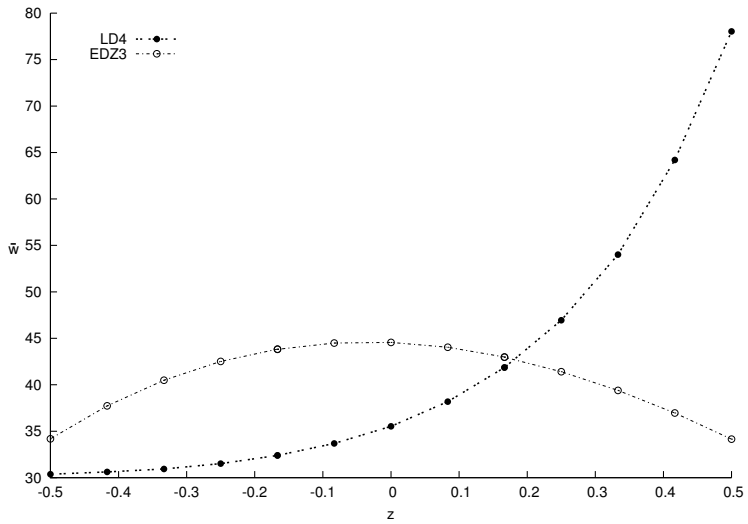

Figura 5.94: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

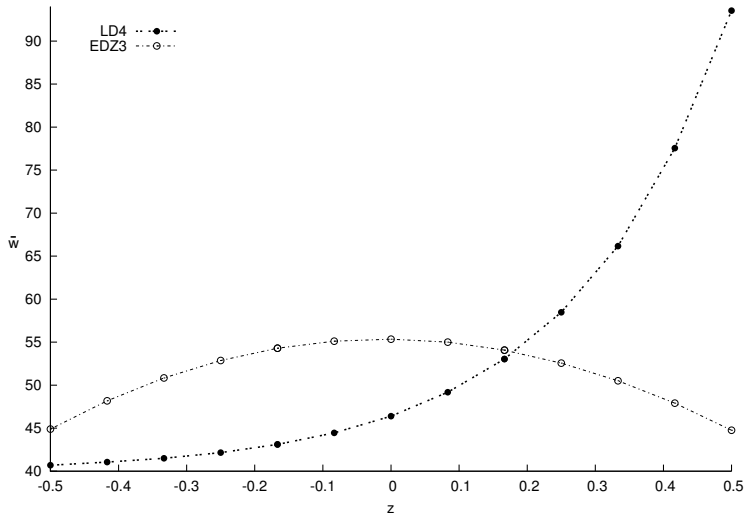

Figura 5.95: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

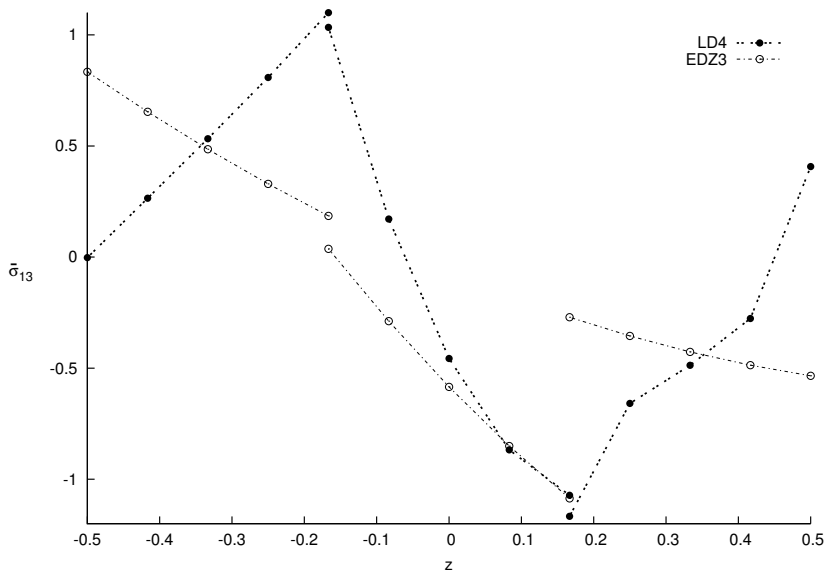

Figura 5.96: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

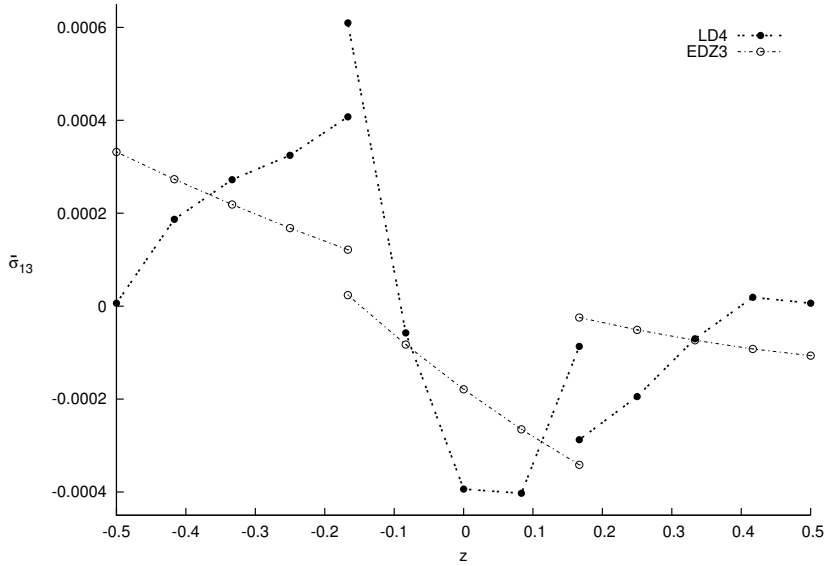

Figura 5.97: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

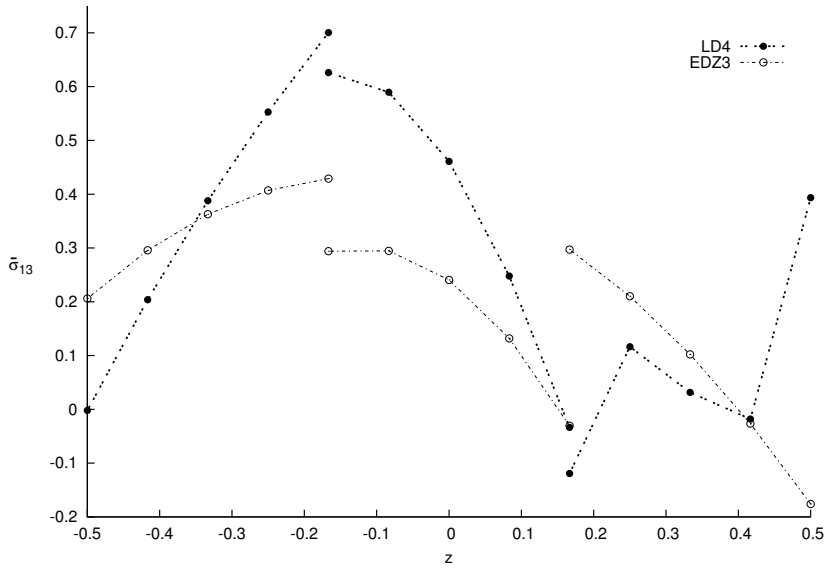

Figura 5.98: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

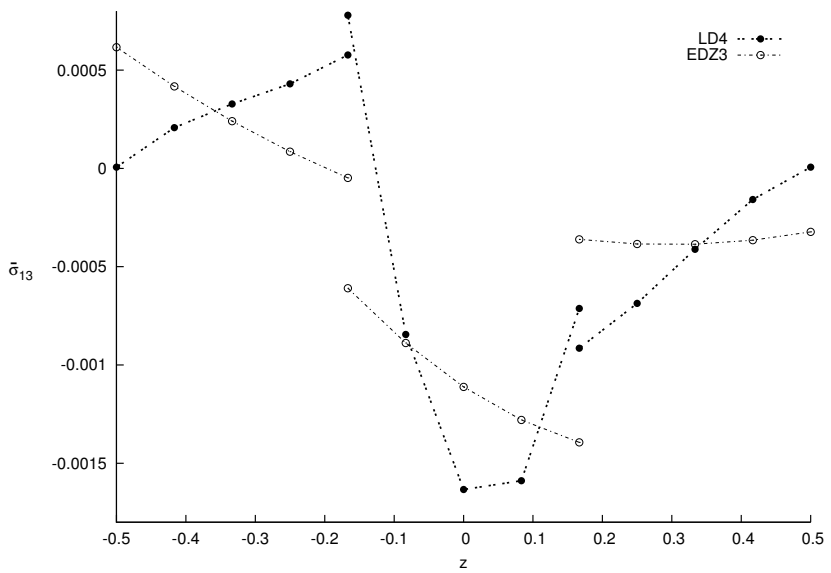

Figura 5.99: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

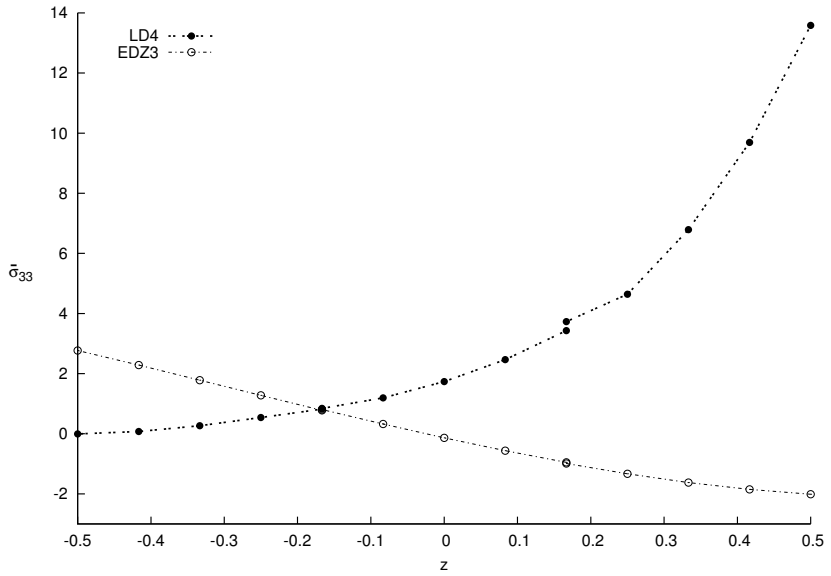

Figura 5.100: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

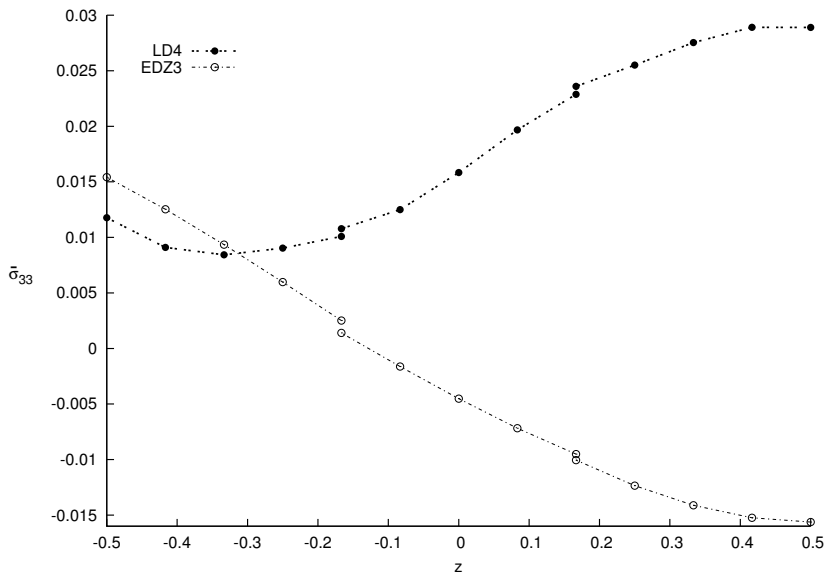

Figura 5.101: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

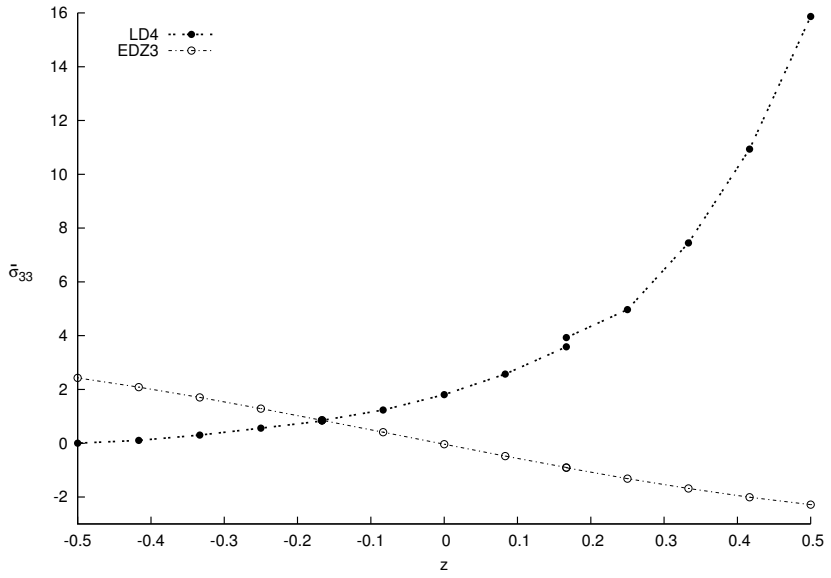

Figura 5.102: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

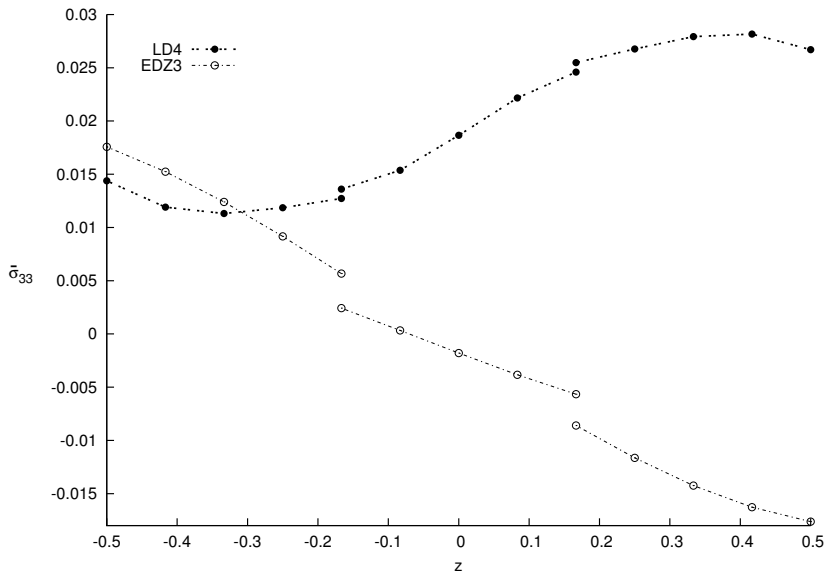

Figura 5.103: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 3

5.2.8 Laminazione simmetrica [90°/90°/0°/0°/90°/90°], numero strati N = 6, semplicemente appoggiata,con carico concentrato in mezzeria

Nei grafici dello spostamento verticale $\bar{w}$ si nota che gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono dei cambiamenti di pendenza pronunciati e non linearità.
Per quanto riguarda i grafici delle tensioni di taglio $\bar{\sigma}_{13}$ si evince che la soluzione è parzialmente soddisfacente, si ottengono le continuità alle interfacce ma l'andamento del profilo di tensione è incerto. Per risolvere questo problema bisognerebbe aumentare l'ordine del polinomio interpolante o modellizzare a priori il profilo di tensione con un principio variazionale misto (RMVT).
Invece per i grafici delle tensioni di taglio $\bar{\sigma}_{33}$ si nota che ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità. Sia per i gusci con bassi rapporti di curvatura ($R/a = 1$) che per i gusci con grandi rapporti di curvatura ($R/a = 5$) sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia.

Tabella 5.36: Laminazione simmetrica [90°/90°/0°/0°/90°/90°] con numero di strati N = 6, semplicemente appoggiata,con carico concentrato in mezzeria. Teoria LD4 con $Mesh\,(9 \times 9)$.

	$R/a = 1$			$R/a = 2$			$R/a = 5$		
a/h	5	10	100	5	10	100	5	10	100
w	35.5844	3.2329	0.0012	43.3005	4.5602	0.0027	46.4546	5.3029	0.0083
σ_{11}	24.6050 -2.8433	1.9587 -0.5929	0.0016 -0.0012	26.7568 -3.4302	2.1125 -0.7221	0.0023 -0.0018	28.0121 -3.6722	2.1866 -0.7921	0.0034 -0.0029
σ_{22}	129.4768 -22.2940	11.3214 -4.5605	0.0186 -0.0108	138.6554 -26.8411	12.4595 -5.8998	0.0243 -0.0153	143.2570 -28.5773	12.9911 -6.6941	0.0334 -0.0239
σ_{12}	0.2677 1.1584	0.0688 0.1536	0.0001 0.0001	-0.0895 1.0927	0.0261 0.1823	0.0002 0.0003	-0.4274 0.8786	-0.0471 0.1542	0.0005 0.0007
σ_{13}	0.8085	0.0831	0.0003	0.7397	0.0770	0.0004	0.5528	0.0449	0.0004
σ_{23}	1.9680	0.2951	-0.0013	3.2534	0.7891	-0.0037	3.7429	1.0684	-0.0017
σ_{33}	4.7550	2.0643	0.0255	4.9643	2.1359	0.0262	5.1002	2.1881	0.0268

Le varie grandezze sono state valutate lungo lo spessore nel modo seguente:

$(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$	in	$z = \pm h/2$
(w)	in	$z = 0$
(σ_{13})	in	$z = -h/4$
$(\sigma_{23}, \sigma_{33})$	in	$z = +h/4$

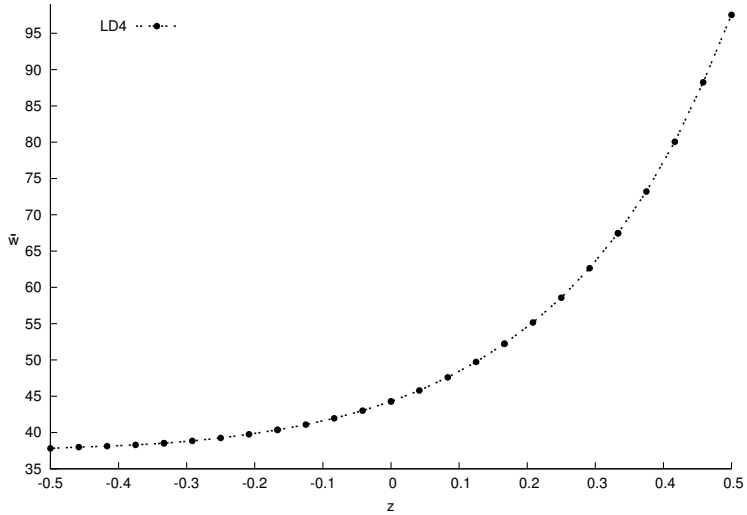

Figura 5.104: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

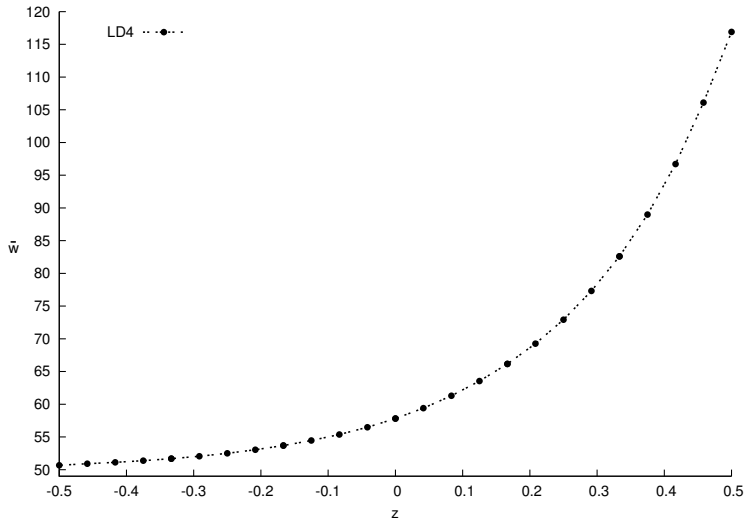

Figura 5.105: Spostamento $\bar{\boldsymbol{w}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

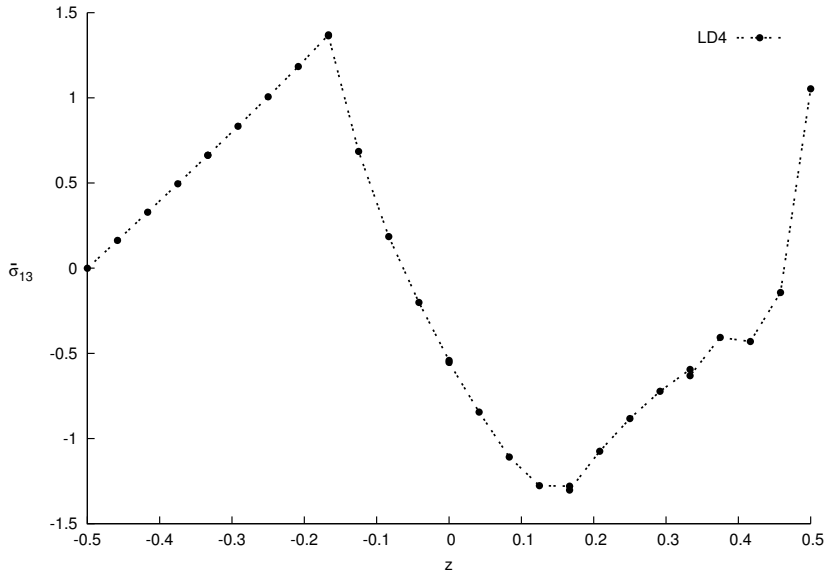

Figura 5.106: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

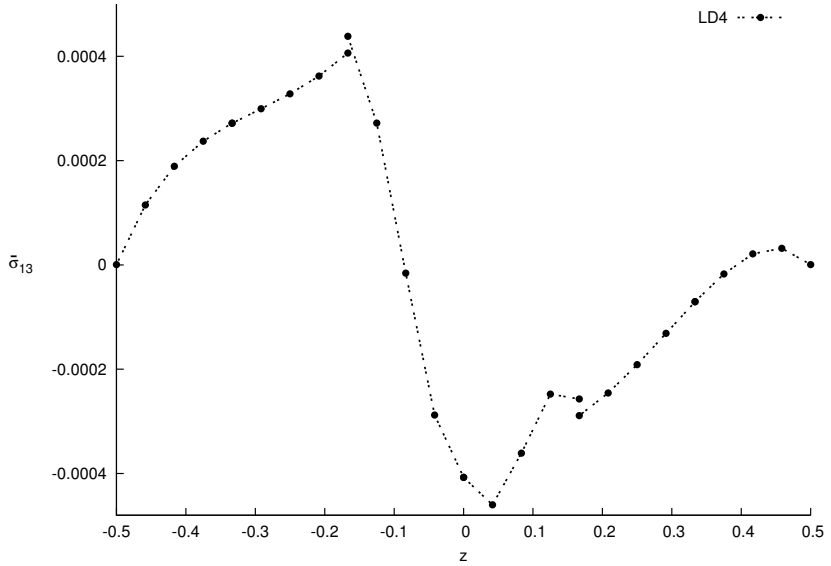

Figura 5.107: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

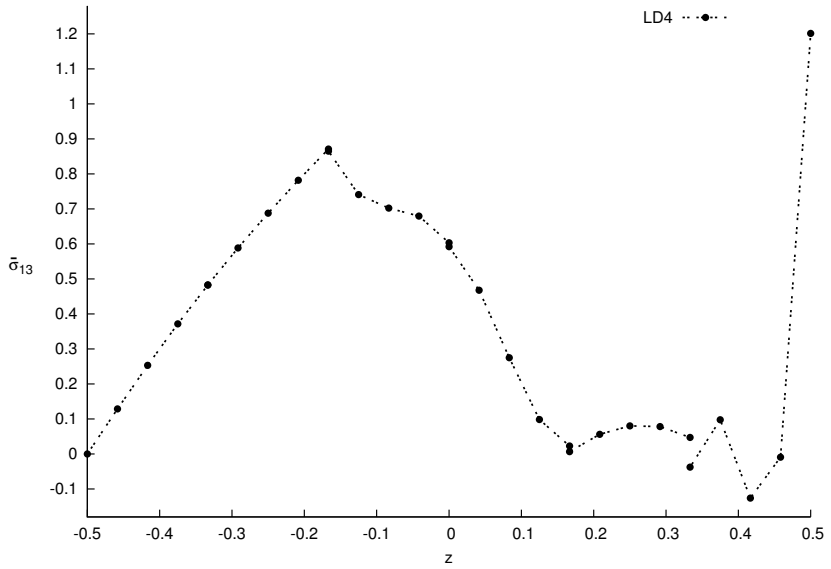

Figura 5.108: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

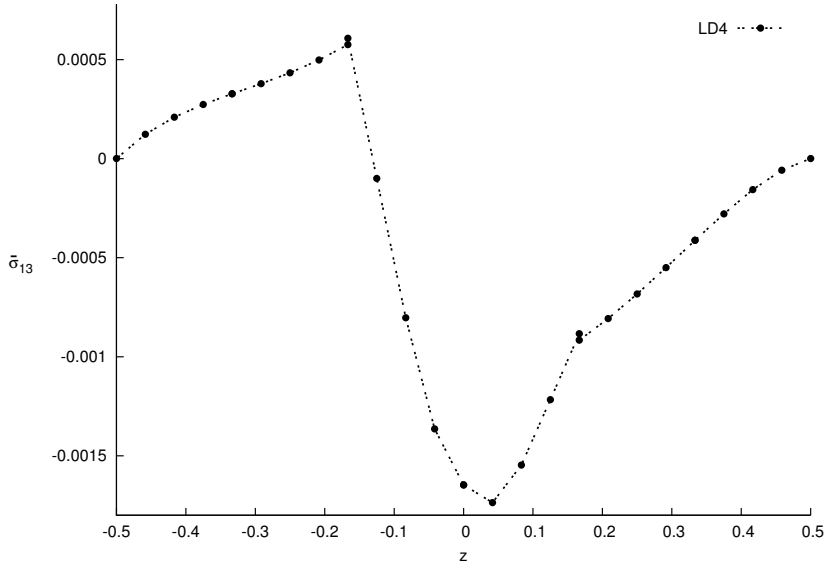

Figura 5.109: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

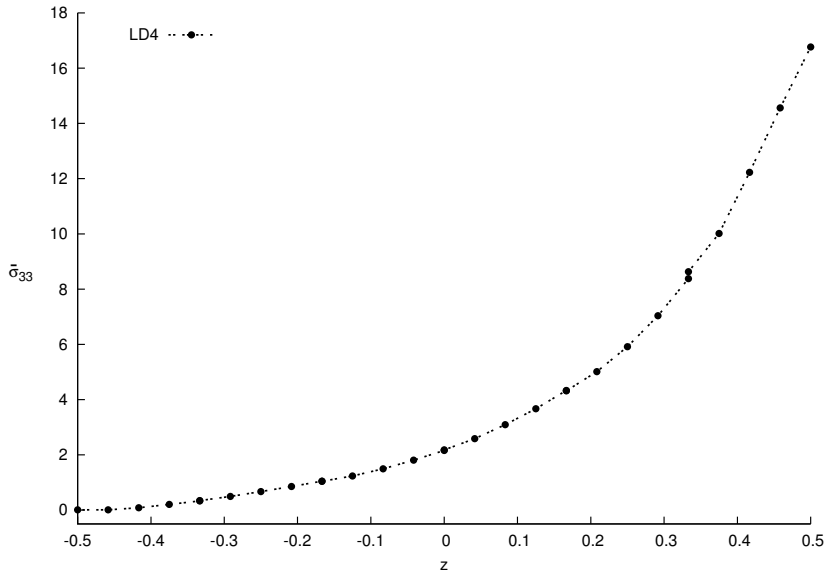

Figura 5.110: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

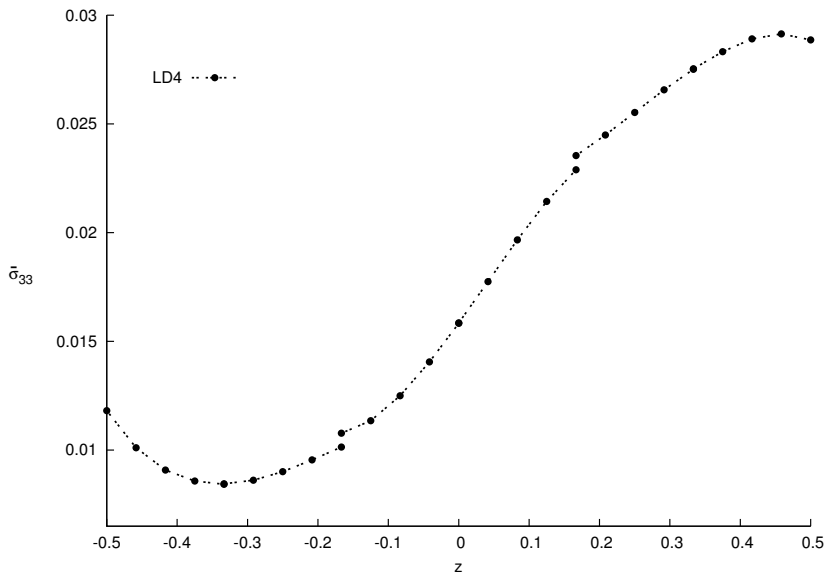

Figura 5.111: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 1$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

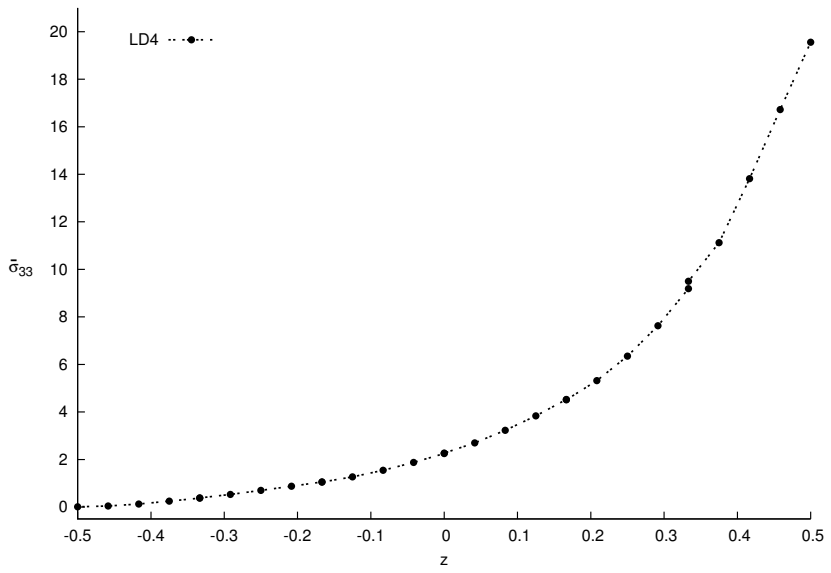

Figura 5.112: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 5$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

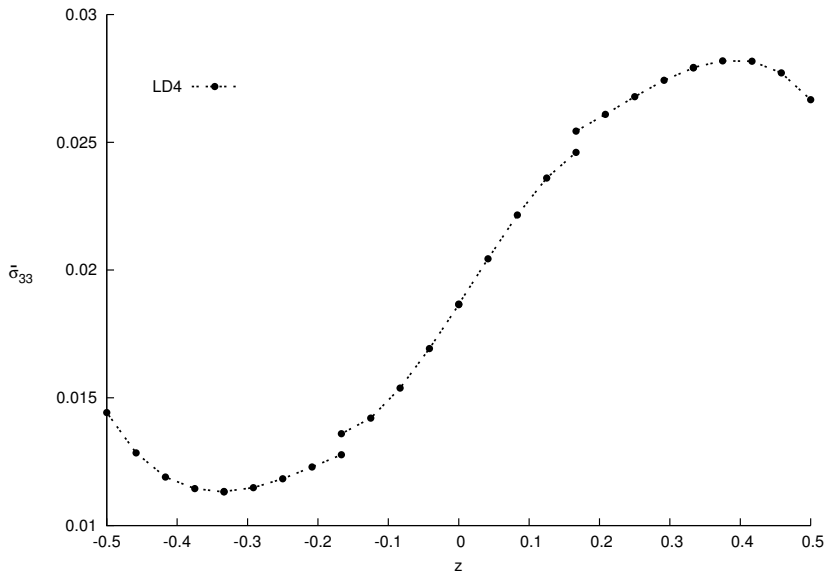

Figura 5.113: Tensione $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(R/a) = 5$ e $(a/h) = 100$ per laminazione simmetrica con strati N = 6

Capitolo 6

Risultati per carichi elettro-meccanici

In questo capitolo viene studiata una struttura multistrato *plate* (piastra) e una struttura *shell* soggette a carichi elettromeccanici. Nella prima parte è stato preso in considerazione una struttura piastra multistrato già presente in letteratura per validare l'elemento finito ricavato nei capitoli precedenti. E' stato condotto inizialmente uno studio di convergenza della soluzione numerica al variare della *mesh* adottata. Successivamente sono state ricavate, per il caso attuatore e il caso sensore, le variabili incognite primarie, ovvero gli spostamenti e il potenziale elettrico, e infine, tramite la risoluzione delle equazioni costitutive, le tensioni e lo spostamento elettrico. Nella seconda parte è stata studiata una struttura *shell* mono-strato, sono stati risolti sia il caso attuatore che sensore. Sono state usate varie teorie contenute nella CUF per risolvere i casi proposti e le soluzioni quasi-3D sono state confrontate tra loro. Si propongono i risultati per tutti questi casi sia in forma grafica che tabellare.

6.1 Piastra composita con strati in materiale piezoelettrico sotto carichi elettromeccanici

I risultati qui di seguito presentati si riferiscono ad una struttura *piastra cross-ply* quadrata semplicemente appoggiata sui quattro lati. Sono stati analizzati i seguenti casi:

- Caso sensore con strati esterni in materiale piezoelettrico PZT-4 e strati interni in materiale composito Gr/Ep con laminazione asimmetrica [90°/0°] con numero di strati complessivi pari a $N = 4$
- Caso attuatore con strati esterni in materiale piezoelettrico PZT-4 e strati interni in materiale composito Gr/Ep con laminazione asimmetrica [90°/0°] con numero di strati complessivi pari a $N = 4$

La piastra è costituita da due strati esterni in materiale piezoelettrico (PZT-4) e da un *core* in materiale composito fatto da due strati con fibre orientate [90°/0°]. Rispetto allo spessore complessivo il singolo strato di materiale piezoelettrico ha uno spessore pari a $h_p = 0.1h_{tot}$, mentre il singolo strato di materiale composito ha uno spessore pari a $h_c = 0.4h_{tot}$.
Sono stati valutati i seguenti rapporti di spessore $a/h = 2, 4, 10, 100$. I risultati numerici, sia della soluzione di riferimento e sia di questo testo, sono stati ottenuti tenendo fisso lo spessore totale pari a $h_{tot} = 1$ e facendo variare il valore del lato della piastra.
Per il caso sensore il carico meccanico applicato al *top* è di tipo bi-sinusoidale:
$p^+ = \hat{p}_z^+ \, sin(m\pi\alpha/a)sin(n\pi\beta/b)$, con $m = 1$, $n = 8$. L'intensità del carico $\hat{p}_z^+ = 1$.
Inoltre viene imposto il potenziale nullo al *top* e al *bottom*: $\Phi_t = \Phi_b = 0$.
Per il caso attuatore il carico elettrico applicato al *top* è di tipo bi-sinusoidale:
$\Phi^+ = \hat{\phi}_z^+ \, sin(m\pi\alpha/a)sin(n\pi\beta/b)$, con $m = 1$, $n = 8$. L'intensità del carico $\hat{\phi}_z^+ = 1$.
Inoltre viene imposto il potenziale: $\Phi_t = 1$, $\Phi_b = 0$. Il carico meccanico è nullo, $p_z = 0$.

In tutti i problemi sono state usate le seguenti proprietà del materiale e i seguenti carichi meccanici:

Nelle tabelle seguenti per le variabili incognite sono stati usati i pedici (1 2 3) al posto di ($\alpha \, \beta \, z$).

Tabella 6.1: Dati fisici del *Piastra*.

Proprietà	PZT-4	Gr/EP
$E_{11}\,[GPa]$	81.3	132.38
$E_{22}\,[GPa]$	81.3	10.756
$E_{33}\,[GPa]$	64.5	10.756
$\nu_{12}\,[-]$	0.329	0.24
$\nu_{13}\,[-]$	0.432	0.24
$\nu_{23}\,[-]$	0.432	0.49
$G_{44}\,[GPa]$	25.6	3.606
$G_{55}\,[GPa]$	25.6	5.6537
$G_{66}\,[GPa]$	30.6	5.6537
$e_{15}\,[C/m^2]$	12.72	0
$e_{24}\,[C/m^2]$	12.72	0
$e_{31}\,[C/m^2]$	-5.20	0
$e_{32}\,[C/m^2]$	-5.20	0
$e_{15}\,[C/m^2]$	15.08	0
$\tilde{\epsilon}_{11}/\epsilon_0\,[-]$	1475	3.5
$\tilde{\epsilon}_{22}/\epsilon_0\,[-]$	1475	3.0
$\tilde{\epsilon}_{33}/\epsilon_0\,[-]$	1300	3.0

6.1.1 Caso sensore piastra con strati N = 4

E' stato fatto uno studio della convergenza della soluzione con il variare della *mesh* sia per lo spostamento verticale che per le tensioni, che per il potenziale elettrico. Nei grafici dello spostamento verticale $\bar{\boldsymbol{w}}$ si nota che, a differenza della teoria classica che predirebbe uno spostamento costante, gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono dei cambiamenti di pendenza pronunciati e non lineari.
Per quanto riguarda le tensioni di taglio $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ si evince che, a differenza della teoria classica che predirebbe una tensione costante a tratti, gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità. Sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia.
Anche per i grafici delle tensioni trasversali $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ si nota che ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità in particolare negli strati esterni in piezoelettrico. Sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia.
Nei grafici del potenziale elettrico $\boldsymbol{\Phi}$, per le piastre sottili $\boldsymbol{(a/h) = 100}$ il potenziale è costante negli strati centrali e varia linearmente in quelli esterni in piezoelettrico. Mentre per le piastre spesse $\boldsymbol{(a/h) = 2}$ ci sono forti non linearità lungo tutto lo spessore della piastra.
Nei grafici dello spostamento elettrico $\boldsymbol{\mathcal{D}_3}$, lo spostamento è sempre costante negli strati centrali e varia non linearmente in quelli esterni in piezoelettrico.

Tabella 6.2: Convergenza per spostamento trasversale $\boldsymbol{w} * 10^{11}$ e potenziale elettrico $\Phi * 10^3$ valutati lungo lo spessore nel punto centrale ($z = 0$), e tensione σ_{11} valutata al *top* ($z = +h/2$). Con $\boldsymbol{(a/h) = 100}$. Caso sensore.

Mesh	8×8	12×12	16×16	20×20	24×24
w	4675363.00	4675175.50	4675137.50	4675124.50	4675118.50
σ_{11}	3182.7451	3160.3088	3152.4524	3148.8147	3146.8381
Φ	4636.6108	4605.8032	4594.7241	4589.5874	4586.8311

Tabella 6.3: Spostamento trasversale $\boldsymbol{w}*10^{11}$ valutato lungo lo spessore nel punto centrale ($z = 0$). $Mesh\,(24 \times 24)$. Caso sensore.

	$a\,/\,h$	2	4	10	100
	LD4	4.9113	30.029	582.06	4675300
	LD1	4.8087	29.852	579.26	4647300
	ED4	4.5047	28.591	573.25	4673900
Ref. [58]	ED1	2.8575	18.488	423.29	3668700
	EDZ1	2.9117	20.153	498.04	4435100
	FSDT	2.8575	18.488	423.29	3668700
	CLT	0.58607	9.3884	364.43	2593400
	LD4	4.9112	30.0286	582.1298	4675118.5000
	LD3	4.9112	30.0285	582.1298	4675118.5000
	LD2	4.8954	29.9812	581.8951	4675095.5000
	LD1	4.8087	29.8512	579.2426	4647075.5000

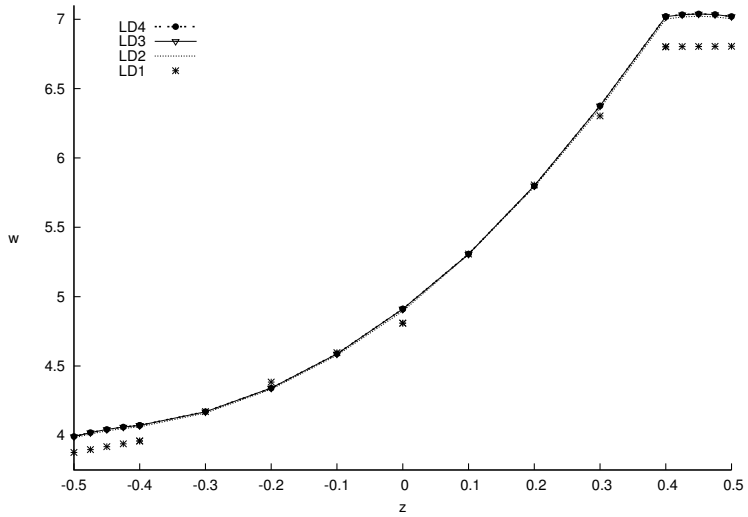

Figura 6.1: Spostamento $\boldsymbol{w}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(\,a\,/\,h\,) = 2$ per Piastra piezo-elettrica caso sensore

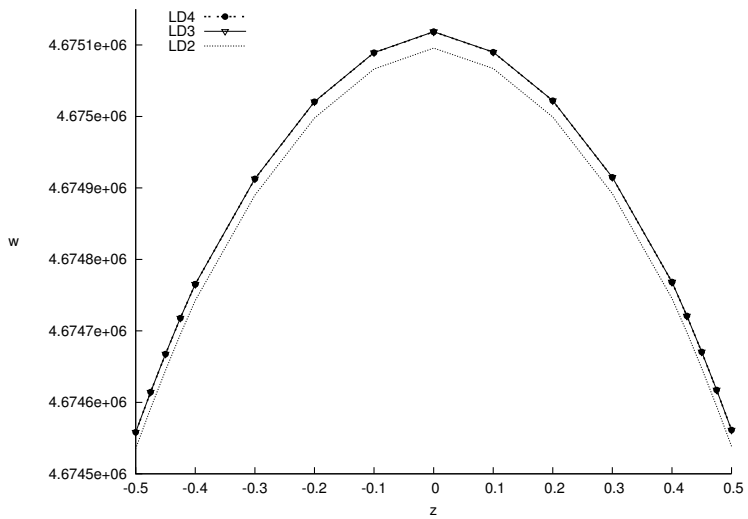

Figura 6.2: Spostamento $\boldsymbol{w}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(a/h) = 100$ per Piastra piezo-elettrica caso sensore

Tabella 6.4: Tensione principale $\boldsymbol{\sigma_{11}}$ valutata lungo lo spessore nei punti esterni ($z = \pm h/2$). La soluzione di riferimento è stata valutata solamente al *top*. $Mesh\,(24 \times 24)$. Caso sensore.

	$a\,/\,h$	2	4	10	100
	LD4	3.2207	6.5642	32.771	3142.1
	LD1	3.5181	6.9995	34.256	3266.9
	ED4	2.4339	5.6978	31.785	3126.4
Ref. [58]	ED1	2.0034	6.4471	37.374	3682.7
	EDZ1	2.0831	5.8424	32.946	3232.8
	FSDT	1.4836	5.9023	36.832	3682.1
	CLT	1.4722	5.8977	36.632	2606.9
	LD4	3.2240	6.5710	32.8145	3146.8381
		-1.9615	-6.8735	-40.1583	-3960.5630
	LD3	3.2263	6.5719	32.8153	3146.8376
		-1.9632	-6.8745	-40.1591	-3960.5627
	LD2	3.2088	6.5659	32.8137	3146.8433
		-1.9630	-6.8711	-40.1548	-3960.5649
	LD1	3.5228	7.0093	34.3028	3271.7583
		-2.2227	-7.3549	-41.6735	-4080.6638

Tabella 6.5: Tensione principale $\boldsymbol{\sigma_{22}}$ valutata lungo lo spessore nei punti esterni ($z = \pm h/2$). $Mesh\,(24 \times 24)$. Caso sensore.

$a\,/\,h$	2	4	10	100
LD4	2.6285	6.9536	40.0718	3960.4514
	-1.9861	-6.2195	-32.8419	-3146.9490
LD3	2.6313	6.9546	40.0725	3960.4512
	-1.9875	-6.2204	-32.8426	-3146.9487
LD2	2.6353	6.9519	40.0682	3960.4531
	-1.9848	-6.2152	-32.8410	-3146.9543
LD1	2.9802	7.4561	41.5897	4080.5522
	-2.1763	-6.6353	-34.3273	-3271.8691

Tabella 6.6: Tensione principale $\boldsymbol{\sigma_{12}}$ valutata lungo lo spessore nei punti esterni ($z = \pm h/2$). $Mesh\,(24 \times 24)$. Caso sensore.

$a\,/\,h$	2	4	10	100
LD4	-0.9538	-2.4838	-14.2878	-1412.5807
	0.7785	2.5974	14.5092	1412.8235
LD3	-0.9536	-2.4838	-14.2878	-1412.5807
	0.7785	2.5974	14.5092	1412.8236
LD2	-0.9447	-2.4764	-14.2810	-1412.5740
	0.7735	2.5902	14.5024	1412.8168
LD1	-0.9004	-2.4470	-14.1892	-1404.0746
	0.7665	2.5744	14.4130	1404.3175

Tabella 6.7: Tensione principale $\boldsymbol{\sigma_{13}}$ valutata lungo lo spessore nel punto centrale ($z = 0$). $Mesh\,(24 \times 24)$. Caso sensore.

	$a\,/\,h$	2	4	10	100
Ref. [58]	LD4	-0.26995	-0.68720	-1.8540	-18.832
	LD4	-0.2758	-0.6902	-1.8576	-18.8640
	LD3	-0.2697	-0.6862	-1.8560	-18.8638
	LD2	-0.3620	-0.8157	-2.1371	-21.6073
	LD1	-0.3165	-0.7094	-1.8693	-18.9304

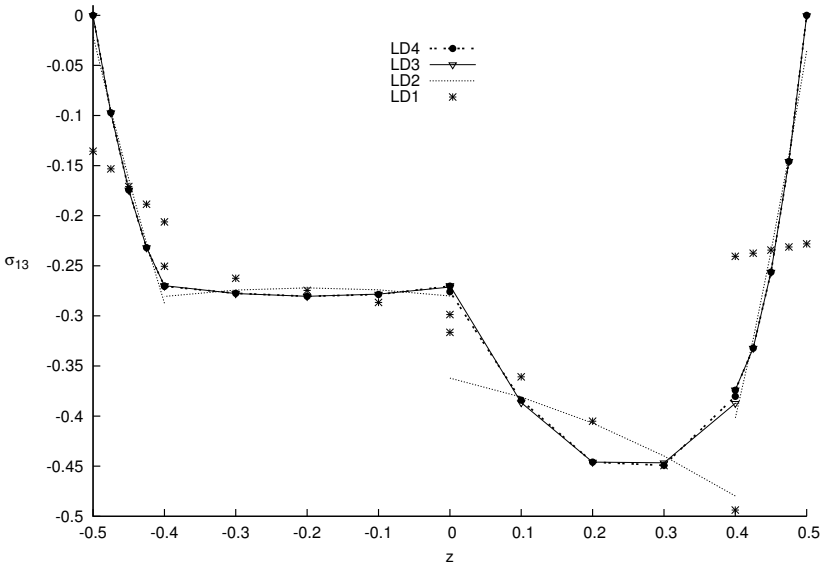

Figura 6.3: Tensione $\boldsymbol{\sigma_{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(\,a\,/\,h\,) = 2$ per Piastra piezo-elettrica caso sensore

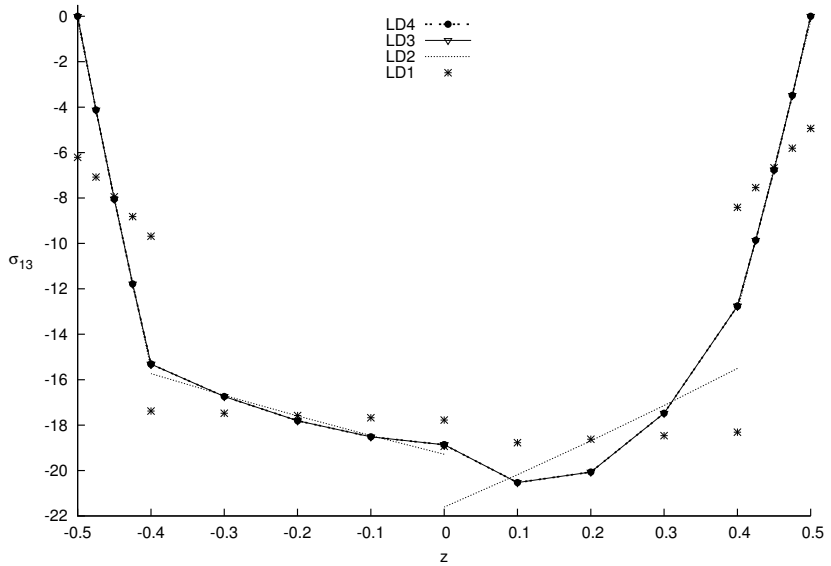

Figura 6.4: Tensione $\boldsymbol{\sigma_{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(a/h) = 100$ per Piastra piezo-elettrica caso sensore

Tabella 6.8: Tensione principale $\boldsymbol{\sigma_{23}}$ valutata lungo lo spessore nel punto centrale ($z = 0$). $Mesh\,(24 \times 24)$. Caso sensore.

a/h	2	4	10	100
LD4	-0.4129	-0.7755	-1.8950	-18.8679
LD3	-0.4099	-0.7748	-1.8949	-18.8679
LD2	-0.4251	-0.7930	-1.9369	-19.2853
LD1	-0.2984	-0.6718	-1.7603	-17.7769

Tabella 6.9: Tensione principale $\boldsymbol{\sigma_{33}}$ valutata lungo lo spessore nei punti esterni ($z = \pm h/2$). $Mesh\,(24 \times 24)$. Caso sensore.

$a\,/\,h$	2	4	10	100
LD4	1.0001	1.0001	1.0001	0.9955
	-0.0001	-0.0001	-0.0001	0.0045
LD3	1.0052	1.0015	1.0008	0.9957
	-0.0030	-0.0014	-0.0008	0.0043
LD2	1.0334	1.0268	1.0270	1.0757
	-0.0236	-0.0260	-0.0270	-0.0757
LD1	2.1237	2.3562	5.1631	342.3075
	-0.6276	-1.2199	-4.1411	-341.3073

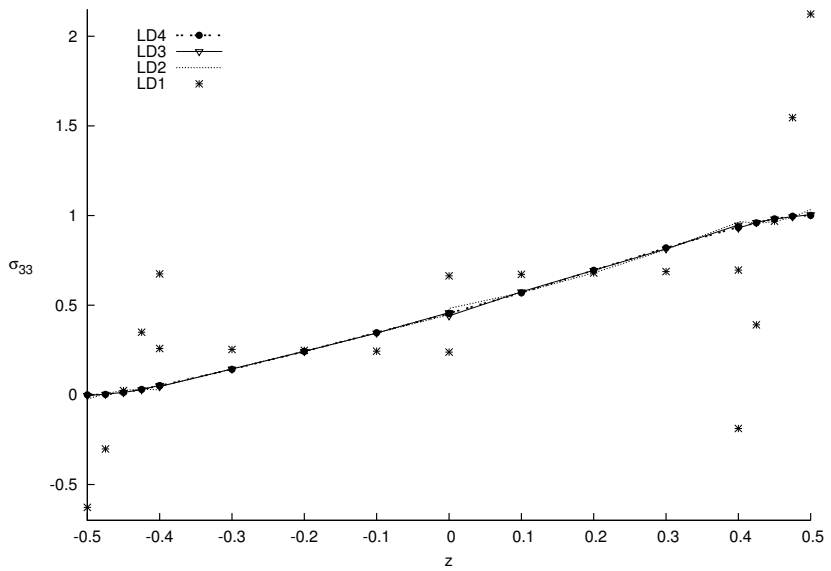

Figura 6.5: Tensione $\boldsymbol{\sigma_{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(\,a\,/\,h\,) = 2$ per Piastra piezo-elettrica caso sensore

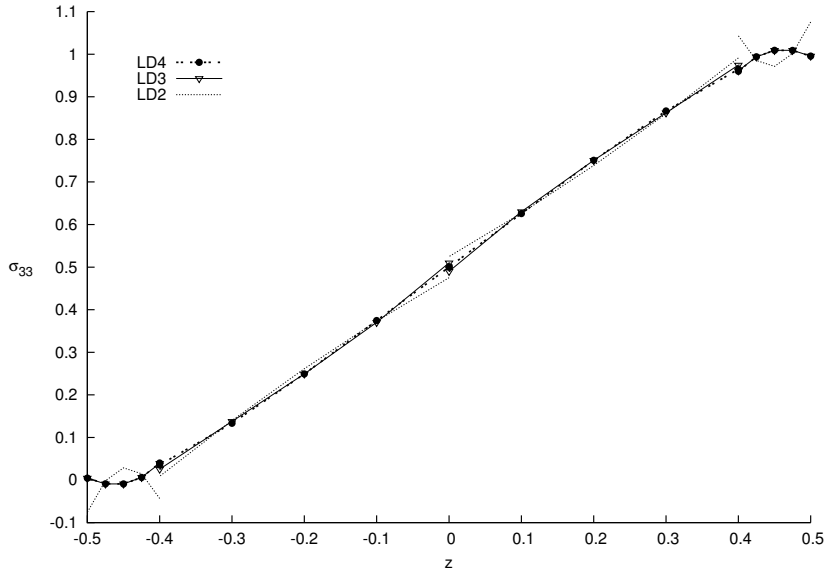

Figura 6.6: Tensione $\boldsymbol{\sigma_{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(a/h) = 100$ per Piastra piezo-elettrica caso sensore

Tabella 6.10: Potenziale elettrico $\boldsymbol{\Phi} * 10^3$ valutato lungo lo spessore nel punto centrale $(z = 0)$. $Mesh\,(24 \times 24)$. Caso sensore.

	a/h	2	4	10	100
	LD4	0.9103	6.1084	44.471	4580.2
	LD1	0.8597	6.0303	44.175	4552.7
	ED4	0.94157	6.1274	44.402	4568.9
Ref. [58]	ED1	0.78657	2.6580	15.044	1470.3
	EDZ1	1.3901	6.3499	41.379	4171.8
	FSDT	0.78657	2.6580	15.044	1470.3
	CLT	0.38494	2.1095	14.366	1040.5
	LD4	0.9106	6.1107	44.4934	4586.8311
	LD3	0.9103	6.1102	44.4920	4586.8311
	LD2	0.8948	6.0899	44.4760	4586.7891
	LD1	0.8599	6.0320	44.1802	4559.1191

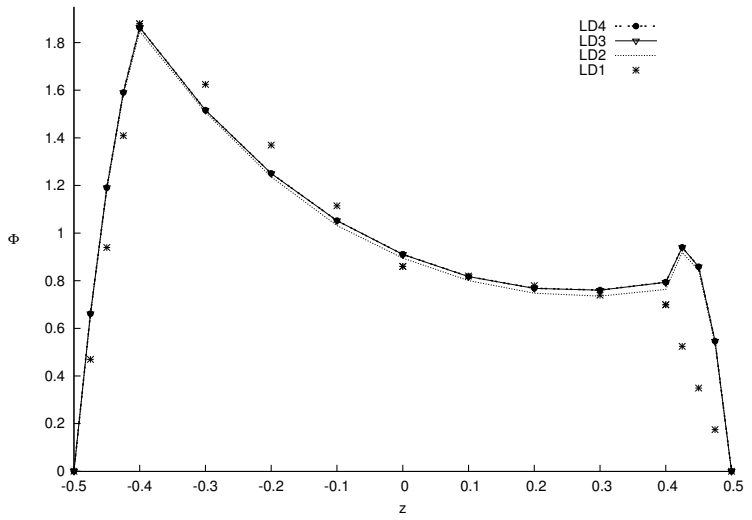

Figura 6.7: Potenziale elettrico $\mathbf{\Phi}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(a/h) = 2$ per Piastra piezo-elettrica caso sensore

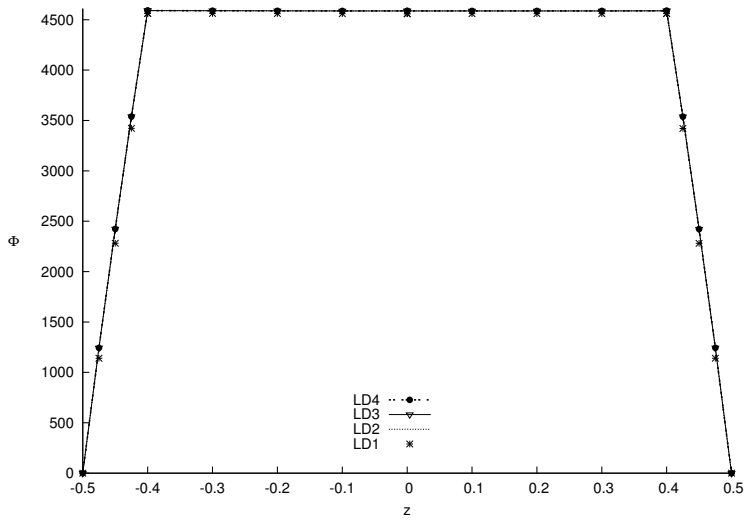

Figura 6.8: Potenziale elettrico $\mathbf{\Phi}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(a/h) = 100$ per Piastra piezo-elettrica caso sensore

Tabella 6.11: Spostamento elettrico trasversale $\boldsymbol{\mathcal{D}_3} * 10^9$ valutato lungo lo spessore al *top* ($z = +h/2$). $Mesh\,(24 \times 24)$. Caso sensore.

	$a\,/\,h$	2	4	10	100
	LD4	0.0256	0.0161	0.0139	0.0136
	LD1	-0.0662	-0.0880	-0.2853	-23.838
	ED4	0.0489	0.0353	0.0327	0.0324
Ref. [58]	ED1	0.0834	0.0464	-0.1163	-18.729
	EDZ1	0.1496	0.1397	0.1372	0.1367
	FSDT	0.0615	0.0401	-0.1174	-18.729
	CLT	-0.0088	-0.0314	-0.1883	-13.311
	LD4	0.0252	0.0140	0.0051	-0.0140
	LD3	0.0255	0.0142	0.0054	-0.0144
	LD2	0.0271	0.0156	0.0064	-0.0205
	LD1	-0.0665	-0.0890	-0.2905	-23.8867

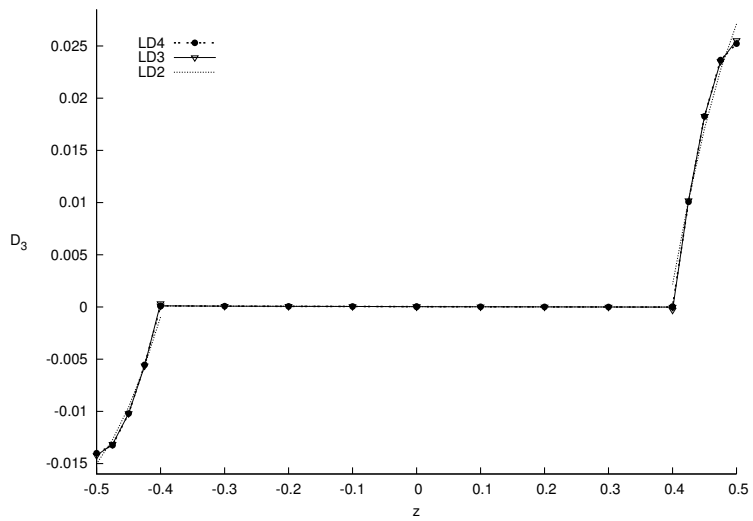

Figura 6.9: Spostamento elettrico $\boldsymbol{\mathcal{D}_3}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(\,a\,/\,h\,) = 2$ per Piastra piezo-elettrica caso sensore

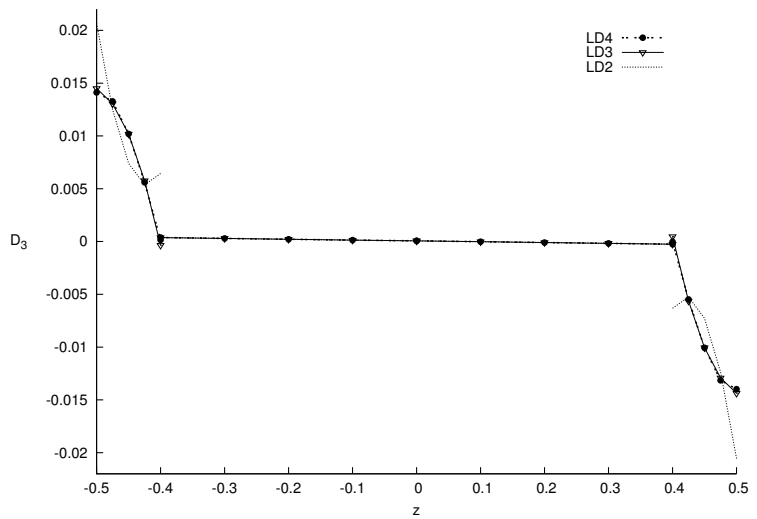

Figura 6.10: Spostamento elettrico $\boldsymbol{\mathcal{D}_3}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(a/h) = 100$ per Piastra piezo-elettrica caso sensore

6.1.2 Caso attuatore piastra con strati N = 4

E' stato fatto uno studio della convergenza della soluzione con il variare della *mesh* sia per lo spostamento verticale che per le tensioni, che per il potenziale elettrico. Nei grafici dello spostamento verticale $\bar{\boldsymbol{w}}$ si nota che, a differenza della teoria classica che predirebbe uno spostamento costante, gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono dei cambiamenti di pendenza pronunciati e non lineari.
Per quanto riguarda le tensioni di taglio $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{13}}$ si evince che, a differenza della teoria classica che predirebbe una tensione costante a tratti, gli andamenti non sono affatto costanti, ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità. Sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia.
Anche per i grafici delle tensioni trasversali $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{33}}$ si nota che ci sono cambiamenti di pendenza e non linearità in particolare negli strati esterni in piezoelettrico. Sono necessarie teorie di alto ordine per riuscire ad avere un ben approssimato profilo di tensione che trovi la continuità all'interfaccia.
Nei grafici del potenziale elettrico $\boldsymbol{\Phi}$, per le piastre sottili $\boldsymbol{(a/h) = 100}$ il potenziale è costante negli strati centrali e varia linearmente in quelli esterni in piezoelettrico. Mentre per le piastre spesse $\boldsymbol{(a/h) = 2}$ ci sono forti non linearità lungo tutto lo spessore della piastra.
Nei grafici dello spostamento elettrico $\boldsymbol{\mathcal{D}_3}$, lo spostamento è sempre costante negli strati centrali e varia non linearmente in quelli esterni in piezoelettrico.

Tabella 6.12: Spostamento trasversale $\boldsymbol{w} * 10^{11}$ valutato lungo lo spessore nel punto centrale ($z = 0$). $Mesh\,(20 \times 20)$. Caso attuatore.

	a/h	2	4	10	100
	LD4	-1.7475	-1.4707	-1.3697	-1.3493
	LD1	-2.1030	-1.5962	-1.4297	-1.3971
	ED4	-4.4320	-3.5676	-3.2840	-3.2284
Ref. [58]	ED1	-13.923	-14.107	-14.159	-14.171
	EDZ1	-13.583	-13.679	-13.706	-13.711
	FSDT	-13.923	-14.107	-14.159	-14.169
	CLT	0.1863	-0.1919	0.1916	0.1364
	LD4	-1.7476	-1.4708	-1.3697	-1.3494
	LD3	-1.7476	-1.4707	-1.3697	-1.3494
	LD2	-1.7291	-1.4663	-1.3691	-1.3493
	LD1	-2.1030	-1.5963	-1.4297	-1.3971

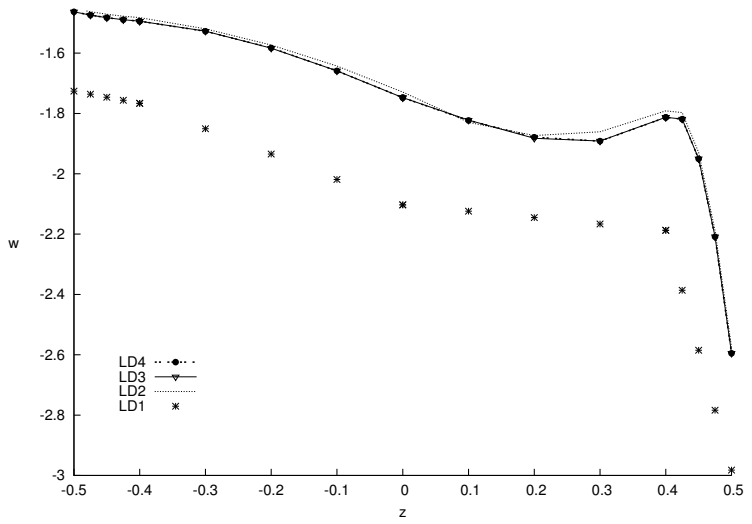

Figura 6.11: Spostamento $\boldsymbol{w}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(a/h) = 2$ per Piastra piezo-elettrica caso attuatore

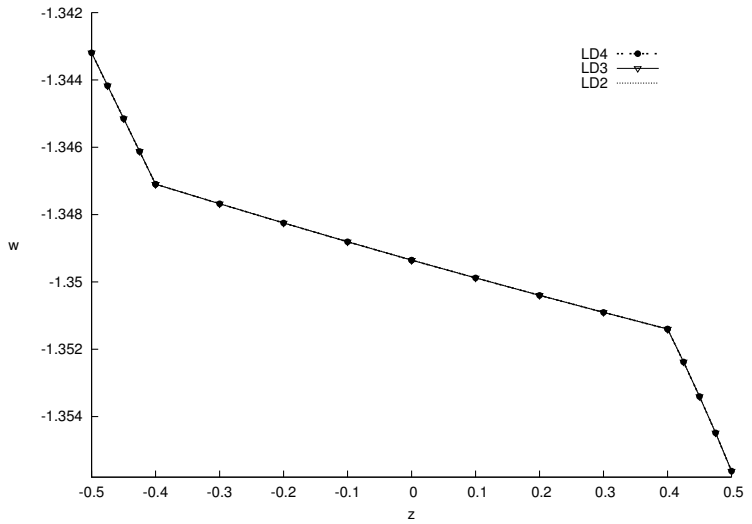

Figura 6.12: Spostamento $\boldsymbol{w}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(a/h) = 100$ per Piastra piezo-elettrica caso attuatore

Tabella 6.13: Tensione principale $\boldsymbol{\sigma_{11}}$ valutata lungo lo spessore nei punti esterni ($z = \pm h/2$). La soluzione di riferimento è stata valutata solamente al *top*. $Mesh\,(20 \times 20)$. Caso attuatore.

	$a\,/\,h$	2	4	10	100
	LD4	3.8162	1.1180	0.1680	-0.0246
	LD1	12.425	3.3433	0.5256	-0.0210
	ED4	8.5792	2.389	0.3687	-0.0269
Ref. [58]	ED1	-4.206	-1.117	-0.1953	-0.0219
	EDZ1	1.2438	0.4308	0.0589	-0.0194
	FSDT	-0.8194	-0.2129	-0.0422	-0.0015
	CLT	-0.7329	-0.1931	-0.0394	-0.0102
	LD4	3.8404	1.1249	0.1693	-0.0246
		0.6961	0.2784	0.0406	-0.0258
	LD3	3.8618	1.1262	0.1693	-0.0246
		0.6970	0.2784	0.0406	-0.0258
	LD2	3.9439	1.1312	0.1695	-0.0246
		0.6884	0.2774	0.0406	-0.0258
	LD1	12.4636	3.3532	0.5272	-0.0210
		0.9953	0.3447	0.0495	-0.0257

Tabella 6.14: Tensione principale $\boldsymbol{\sigma_{22}}$ valutata lungo lo spessore nei punti esterni ($z = \pm h/2$). $Mesh\,(20 \times 20)$. Caso attuatore.

$a\,/\,h$	2	4	10	100
LD4	2.9068	0.8955	0.1426	-0.0248
	0.6915	0.2286	0.0206	-0.0261
LD3	2.9267	0.8968	0.1427	-0.0248
	0.6924	0.2287	0.0206	-0.0261
LD2	2.9806	0.9014	0.1428	-0.0248
	0.6808	0.2276	0.0205	-0.0261
LD1	11.3941	3.1093	0.4996	-0.0212
	0.9872	0.2912	0.0285	-0.0260

Tabella 6.15: Tensione principale $\boldsymbol{\sigma_{12}}$ valutata lungo lo spessore nei punti esterni ($z = \pm h/2$). $Mesh\,(20 \times 20)$. Caso attuatore.

$a\,/\,h$	2	4	10	100
LD4	-5.4841	-1.4664	-0.2455	-0.0065
	-0.2821	-0.1132	-0.0264	-0.0043
LD3	-5.4845	-1.4664	-0.2455	-0.0065
	-0.2822	-0.1132	-0.0264	-0.0043
LD2	-5.4962	-1.4671	-0.2455	-0.0065
	-0.2767	-0.1125	-0.0264	-0.0043
LD1	-5.4498	-1.4611	-0.2441	-0.0065
	-0.3543	-0.1276	-0.0280	-0.0043

Tabella 6.16: Tensione principale $\boldsymbol{\sigma_{13}}$ valutata lungo lo spessore nel punto centrale ($z = 0$). $Mesh\,(20 \times 20)$. Caso attuatore.

	$a\,/\,h$	2	4	10	100
Ref. [58]	LD4	0.0864	0.0239	0.0020	0.0000
	LD4	0.0929	0.0241	0.0020	0.0000
	LD3	0.0651	0.0227	0.0020	0.0000
	LD2	0.1824	0.0359	0.0028	0.0000
	LD1	0.0215	0.0029	0.0004	0.0000

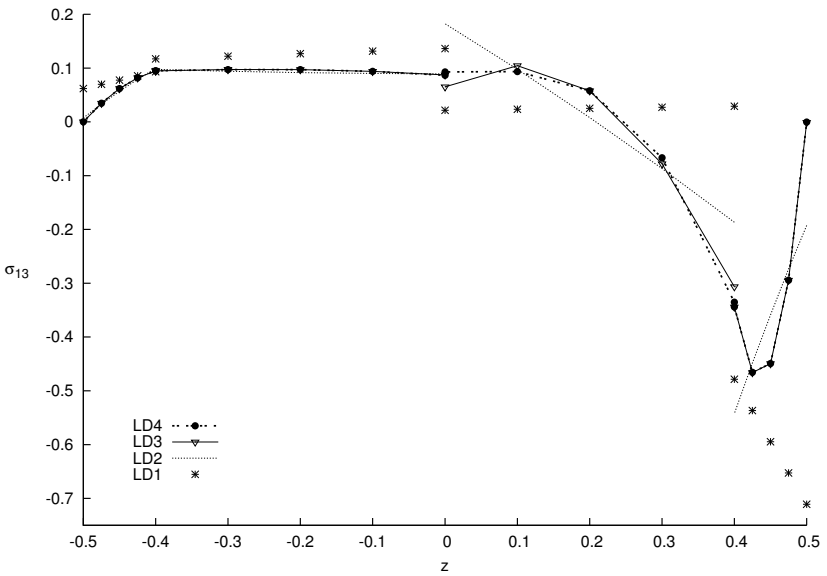

Figura 6.13: Tensione $\boldsymbol{\sigma_{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(\,a\,/\,h\,) = 2$ per Piastra piezo-elettrica caso attuatore

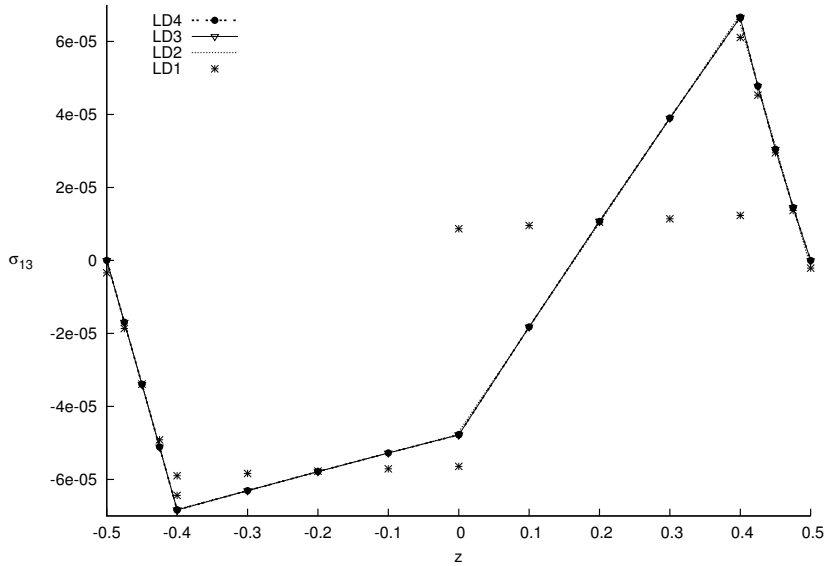

Figura 6.14: Tensione $\boldsymbol{\sigma_{13}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(a/h) = 100$ per Piastra piezo-elettrica caso attuatore

Tabella 6.17: Tensione principale $\boldsymbol{\sigma_{23}}$ valutata lungo lo spessore nel punto centrale ($z = 0$). $Mesh\,(20 \times 20)$. Caso attuatore.

a/h	2	4	10	100
LD4	0.0247	-0.0082	-0.0009	0.0000
LD3	0.0223	-0.0083	-0.0009	0.0000
LD2	0.0420	-0.0061	-0.0008	0.0000
LD1	-0.0417	-0.0170	-0.0014	0.0001

Tabella 6.18: Tensione principale $\boldsymbol{\sigma_{33}}$ valutata lungo lo spessore nei punti esterni ($z = \pm h/2$). $Mesh\,(20 \times 20)$. Caso attuatore.

$a\,/\,h$	2	4	10	100
LD4	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
LD3	0.0271	0.0019	0.0001	0.0000
	0.0011	0.0001	0.0000	0.0000
LD2	0.0547	0.0045	0.0001	0.0000
	0.0083	0.0010	0.0000	0.0000
LD1	8.1925	2.1772	0.3540	0.0036
	0.2787	0.0674	0.0103	0.0001

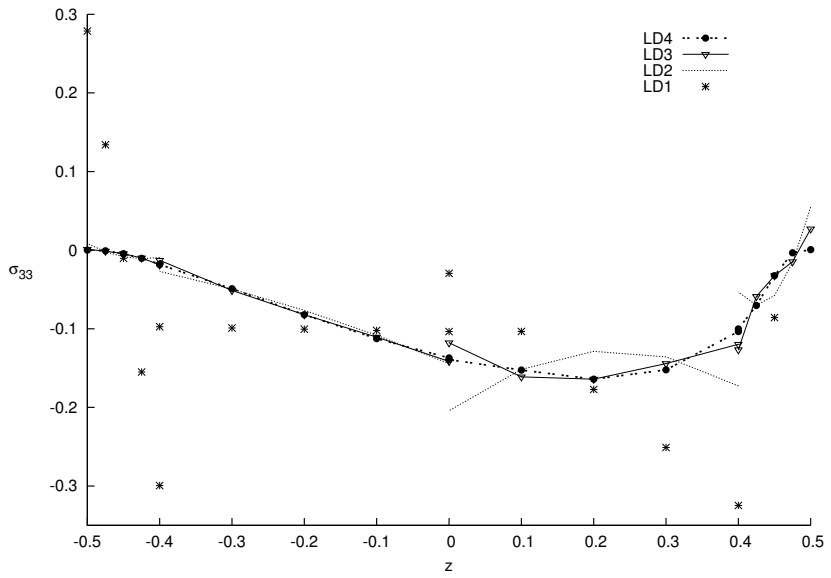

Figura 6.15: Tensione $\boldsymbol{\sigma_{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(\,a\,/\,h\,) = 2$ per Piastra piezo-elettrica caso attuatore

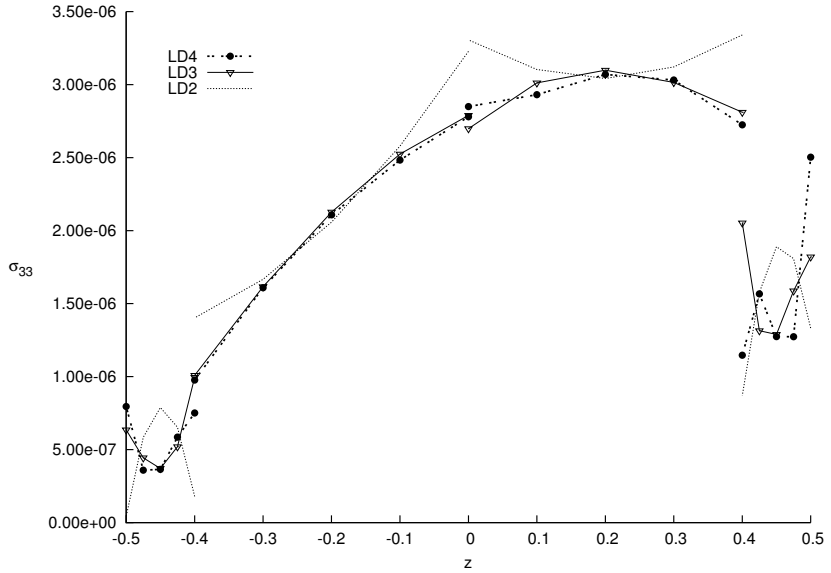

Figura 6.16: Tensione $\boldsymbol{\sigma_{33}}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(a/h) = 100$ per Piastra piezo-elettrica caso attuatore

Tabella 6.19: Potenziale elettrico $\boldsymbol{\Phi}$ valutato lungo lo spessore nel punto centrale ($z = 0$). $Mesh\,(20 \times 20)$. Caso attuatore.

	a/h	2	4	10	100
	LD4	0.3330	0.4477	0.4910	0.4999
	LD1	0.3242	0.4468	0.4910	0.4999
	ED4	0.3343	0.4481	0.4911	0.4999
Ref. [58]	ED1	0.3219	0.4461	0.4908	0.4999
	EDZ1	0.3335	0.4478	0.4910	0.4999
	FSDT	0.3219	0.4461	0.4908	0.4999
	CLT	0.3244	0.4470	0.4910	0.4999
	LD4	0.3330	0.4477	0.4910	0.4999
	LD3	0.3330	0.4477	0.4910	0.4999
	LD2	0.3331	0.4477	0.4910	0.4999
	LD1	0.3241	0.4468	0.4910	0.4999

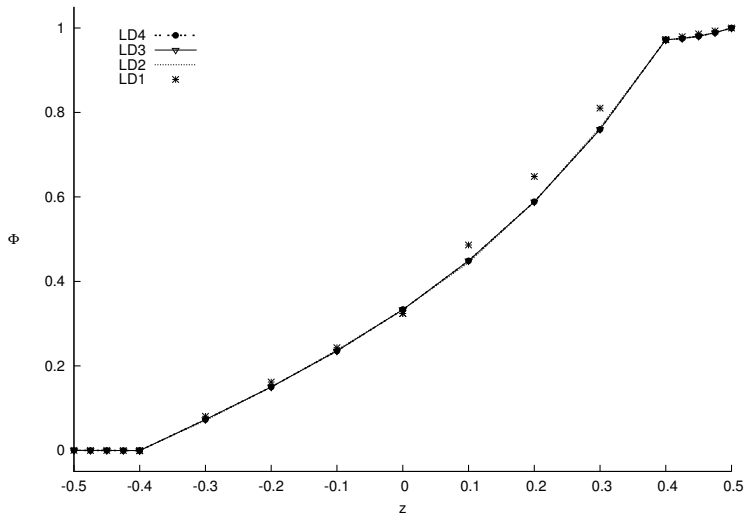

Figura 6.17: Potenziale elettrico $\mathbf{\Phi}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(a/h) = 2$ per Piastra piezo-elettrica caso attuatore

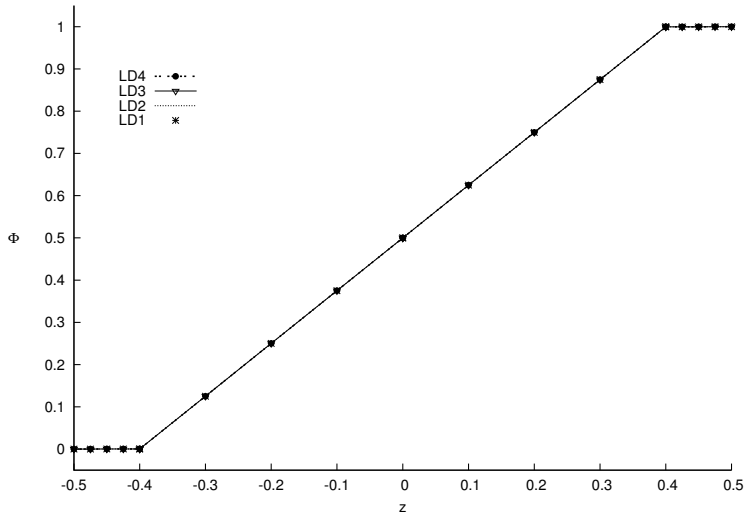

Figura 6.18: Potenziale elettrico $\mathbf{\Phi}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(a/h) = 100$ per Piastra piezo-elettrica caso attuatore

Tabella 6.20: Spostamento elettrico trasversale $\boldsymbol{\mathcal{D}_3} * 10^9$ valutato lungo lo spessore al *top* ($z = +h/2$). $Mesh\,(20 \times 20)$. Caso attuatore.

	$a\,/\,h$	2	4	10	100
	LD4	-9.4085	-2.4184	-0.4168	-0.0370
	LD1	-5.2964	-1.3814	-0.2504	-0.0354
	ED4	-9.1127	-2.3523	-0.4068	-0.0369
Ref. [58]	ED1	-3.8089	-0.9669	-0.1819	-0.0347
	EDZ1	-8.6524	-2.2360	-0.3879	-0.0367
	FSDT	-3.6667	-0.9566	-0.1816	-0.0347
	CLT	-3.2297	-0.8443	-0.1635	-0.0345
	LD4	-9.4104	-2.4185	-0.4167	-0.0370
	LD3	-9.4047	-2.4182	-0.4167	-0.0370
	LD2	-9.3822	-2.4167	-0.4166	-0.0370
	LD1	-5.2969	-1.3815	-0.2504	-0.0353

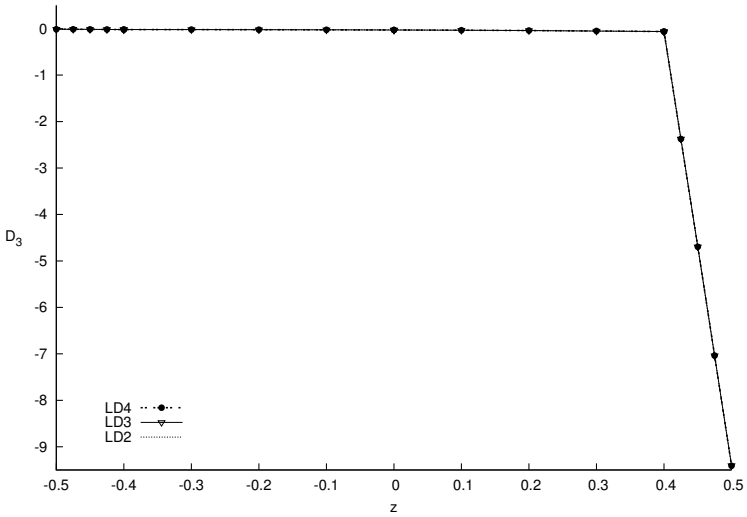

Figura 6.19: Spostamento elettrico $\boldsymbol{\mathcal{D}_3}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(\,a\,/\,h\,) = 2$ per Piastra piezo-elettrica caso attuatore

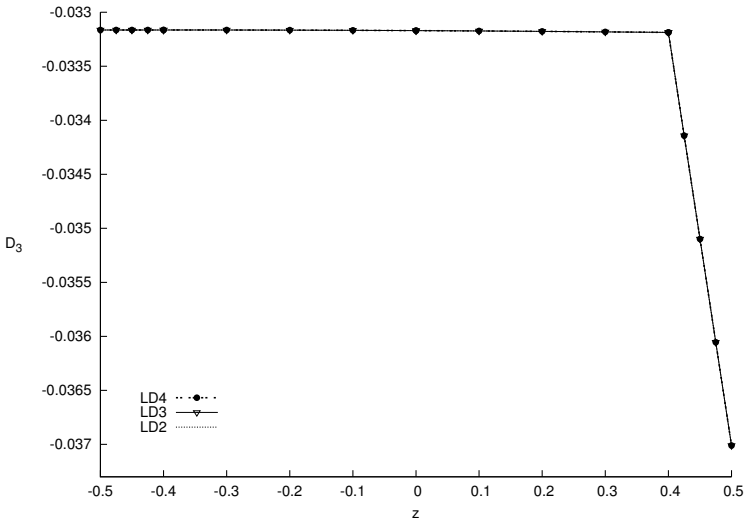

Figura 6.20: Spostamento elettrico $\boldsymbol{\mathcal{D}_3}$ lungo lo spessore, con diverse teorie, con rapporto $(a/h) = 100$ per Piastra piezo-elettrica caso attuatore

6.2 Shell composito con strati in materiale piezoelettrico sotto carichi elettromeccanici

I risultati qui di seguito presentati si riferiscono ad una struttura *shell* semplicemente appoggiata sui quattro lati. Sono stati analizzati i seguenti casi:

- Caso sensore mono-strato in materiale piezoelettrico PZT-4
- Caso attuatore mono-strato in materiale piezoelettrico PZT-4

Si studia uno *shell* cilindrico, ovvero un guscio con $R_\alpha = +\infty$ e R_β di quantità finita. Sono stati valutati i seguenti rapporti di spessore $R/h = 2, 4, 10, 100$. I risultati numerici, sia della soluzione di riferimento e sia di questo testo, sono stati ottenuti mantenendo fisse le dimensioni geometriche dei lati e del raggio di curvatura, e facendo variare il valore dello spessore.
I parametri geometrici sono: $a = 40$, $b = 2\pi R_\beta$, $R_\beta = 10$.
Per il caso sensore il carico meccanico applicato al *bottom* è di tipo bi-sinusoidale:
$p^- = \hat{p}_z^- \, sin(m\pi\alpha/a) sin(n\pi\beta/b)$, con $m = 1$, $n = 8$. L'intensità del carico $p_z^- = 1$.
Inoltre viene imposto il potenziale nullo al *top* e al *bottom*: $\Phi_t = \Phi_b = 0$.
Per il caso attuatore il carico elettrico applicato al *top* è di tipo bi-sinusoidale:
$\Phi^+ = \hat{\phi}_z^+ \, sin(m\pi\alpha/a) sin(n\pi\beta/b)$, con $m = 1$, $n = 8$. L'intensità del carico $\phi_z^+ = 1$.
Inoltre viene imposto il potenziale: $\Phi_t = 1$, $\Phi_b = 0$. Il carico meccanico è nullo, $p_z = 0$.
In tutti i problemi sono state usate le seguenti proprietà del materiale:

Nelle tabelle seguenti per le variabili incognite sono stati usati i pedici (1 2 3) al posto di ($\alpha\, \beta\, z$).

Tabella 6.21: Dati fisici del *Shell*.

Proprietà	PZT-4	Gr/EP
$E_{11}\,[GPa]$	81.3	132.38
$E_{22}\,[GPa]$	81.3	10.756
$E_{33}\,[GPa]$	64.5	10.756
$\nu_{12}\,[-]$	0.329	0.24
$\nu_{13}\,[-]$	0.432	0.24
$\nu_{23}\,[-]$	0.432	0.49
$G_{44}\,[GPa]$	25.6	3.606
$G_{55}\,[GPa]$	25.6	5.6537
$G_{66}\,[GPa]$	30.6	5.6537
$e_{15}\,[C/m^2]$	12.72	0
$e_{24}\,[C/m^2]$	12.72	0
$e_{31}\,[C/m^2]$	-5.20	0
$e_{32}\,[C/m^2]$	-5.20	0
$e_{15}\,[C/m^2]$	15.08	0
$\tilde{\epsilon}_{11}/\epsilon_0\,[-]$	1475	3.5
$\tilde{\epsilon}_{22}/\epsilon_0\,[-]$	1475	3.0
$\tilde{\epsilon}_{33}/\epsilon_0\,[-]$	1300	3.0

6.2.1 Caso sensore shell mono-strato

Le varie grandezze sono state valutate lungo lo spessore nel modo seguente:

$(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$	in	$z = \pm h/2$
$(w, \sigma_{13}, \sigma_{23})$	in	$z = 0$
(σ_{33})	in	$z = \pm h/2$
(Φ)	in	$z = 0$
$(\mathcal{D}_3)$	in	$z = +h/2$

Tabella 6.22: Shell cilindrico mono-strato piezo-elettrico. $Mesh\,(20 \times 20)$.

	$R\,/\,h$		2	4	10	100
Ref. [59]	$w\,(10^9)$	LD4	0.0566	0.3332	4.5483	3016.6
		LM4	0.0566	0.3332	4.5483	3016.6
		LFM4	0.0566	0.3332	4.5483	3016.6
	σ_{33}	LD4	-1.5105	-3.0742	-33.331	-22413
		LM4	-1.1392	-1.0671	-1.0269	-1.0018
		LFM4	-1.1392	-1.0671	-1.0269	-1.0018
	Φ	LD4	0.0153	0.0355	0.0942	0.6513
		LM4	0.0153	0.0355	0.0942	0.6513
		LFM4	0.0153	0.0355	0.0942	0.6513
	$\mathcal{D}_3\,(10^9)$	LD4	0.0224	0.1377	2.0958	1456.1
		LM4	0.0224	0.1377	2.0958	1456.1
		LFM4	0.0095	0.0028	-0.1646	-111.76
	$w\,(10^9)$	LD4	0.0566	0.3331	4.5473	3017.2876
	σ_{11}	LD4	0.4332	2.3837	17.5910	2055.6587
			-1.4003	-3.3497	-17.0300	-316.7597
	σ_{22}	LD4	0.9068	4.9006	35.0550	2567.2803
			-2.0590	-6.5066	-38.7790	-2542.8062
	σ_{12}	LD4	0.0008	0.0039	0.0291	1.3707
			-0.0008	-0.0040	-0.0329	-4.0802
	σ_{13}	LD4	-0.1084	-0.2644	-0.7242	-5.1421
	σ_{23}	LD4	0.0046	0.0194	0.0750	0.2104
	σ_{33}	LD4	-0.0798	-0.0469	0.0317	3.2476
			-1.1658	-1.0914	-1.0992	-5.2059
	Φ	LD4	0.0153	0.0356	0.0949	0.6696
	$\mathcal{D}_3\,(10^9)$	LD4	0.0054	-0.0179	-0.2668	-111.1786

6.2.2 Caso attuatore shell mono-strato

Le varie grandezze sono state valutate lungo lo spessore nel modo seguente:

$(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$	in	$z = \pm h/2$
$(w, \sigma_{13}, \sigma_{23})$	in	$z = 0$
(σ_{33})	in	$z = \pm h/2$
(Φ)	in	$z = 0$
$(\mathcal{D}_3)$	in	$z = +h/2$

Tabella 6.23: Shell cilindrico mono-strato piezo-elettrico. $Mesh\,(20 \times 20)$.

	$R\,/\,h$		2	4	10	100
Ref. [59]	$w\,(10^{11})$	LD4	-9.6220	-11.285	6.4540	11277
		LM4	-9.6220	-11.285	6.4540	11277
		LFM4	-9.6220	-11.285	6.4540	11277
	σ_{33}	LD4	3.0350	2.5512	1.0498	-836.32
		LM4	0.0431	0.0114	0.0004	-0.0001
		LFM4	0.0431	0.0114	0.0004	-0.0001
	Φ	LD4	0.3431	0.4611	0.5037	0.5254
		LM4	0.3431	0.4611	0.5037	0.5254
		LFM4	0.3431	0.4611	0.5037	0.5254
	$\mathcal{D}_3\,(10^{11})$	LD4	-605.73	-801.76	-1622.9	-10416
		LM4	-605.73	-801.76	-1622.9	-10416
		LFM4	-584.80	-783.99	-1615.6	-16266
	$w\,(10^{11})$	LD4	-9.6219	-11.2852	6.4451	11275.3779
	σ_{11}	LD4	-3.2642	-4.4933	-8.9704	-18.4390
			-0.9616	-3.5544	-10.3507	-106.9489
	σ_{22}	LD4	0.3518	0.3624	1.3358	94.4157
			0.4177	0.0395	-1.4200	-94.1954
	σ_{12}	LD4	0.0036	0.0042	0.0082	0.1075
			0.0005	0.0019	0.0054	-0.0114
	σ_{13}	LD4	-0.0207	-0.0207	-0.0324	-0.1905
	σ_{23}	LD4	0.0023	0.0027	0.0014	0.0072
	σ_{33}	LD4	0.0731	0.0311	0.0090	0.1865
			0.1009	0.0371	0.0047	0.0454
	Φ	LD4	0.3432	0.4611	0.5037	0.5259
	$\mathcal{D}_3\,(10^{11})$	LD4	-586.0881	-786.2541	-1621.7268	-16310.8350

Capitolo 7

Conclusioni

In questa tesi sono state analizzate strutture avanzate con problemi multi-campo. In particolare è stata effettuata l'analisi di *shells* compositi soggetti a carichi puramente meccanici e l'analisi di strutture multistrato con strati in materiale piezoelettrico soggette a carichi elettromeccanici.
I modelli *shell* contenuti nella CUF sono stati utilizzati per descrivere le variabili di campo: spostamenti e potenziale elettrico. Questi modelli differiscono tra loro nella descrizione delle variabili (*Equivalent Single Layer* (ESL) o *Layer Wise* (LW)) e nell'ordine di espansione lungo lo spessore usati per le variabili primarie del problema. Inoltre sono considerati modelli raffinati nella CUF, dipendenti dal principio variazionale utilizzato per la derivazione delle equazioni di governo. I modelli raffinati sono sviluppati a partire dal *Principle of Virtual Displacements* (PVD) con la possibilità di una modellizzazione a priori degli spostamenti e del potenziale elettrico. Le equazioni di governo ottenute sono state risolte per via numerica usando il *Finite Element Method*.

I risultati sono stati organizzati in due parti: la struttura *shell* soggetta a carichi puramente meccanici, le strutture *plate* e *shell* soggette a carichi elettromeccanici.

Per contrastare il fenomeno del *membrane locking* e dello *shear locking* è stato utilizzato il metodo del *Mixed Interpolation of Tensorial Components* o MITC. I risultati ottenuti analizzando dei problemi presenti in letteratura hanno mostrato che:

- L'elemento finito *shell* MITC presenta buone proprietà di convergenza e robustezza;
- Il metodo MITC rimane efficiente nel caso di elementi finiti *shell* formulati sulle basi di teorie di alto ordine contenute nella *Unified Formulation*;
- L'elemento MITC è completamente libero dal fenomeno del *locking*.

Nella prima parte è stata condotta l'analisi statica di un pannello sferico multistrato composito soggetto a carichi puramente meccanici. I risultati ottenuti sono stati organizzati in termini di spostamenti, tensioni nel piano e tensioni trasversali, per vari rapporti di spessore per vari rapporti di curvatura. Le prestazioni dell'elemento *shell* sono state

verificate e sono state comparate le differenti teorie (classiche e raffinate) contenute nella CUF. Le conclusioni sono le seguenti:

1. l'elemento *shell* è completamente libero dal fenomeno del *locking* per qualsiasi rapporto di curvatura e spessore;
2. i risultati convergono alla soluzione esatta aumentando il numero degli elementi e l'ordine di espansione degli spostamenti lungo la direzione dello spessore;
3. quando lo *shell* è molto spesso, i modelli LW lavorano meglio di quelli ZZ, e questi ultimi lavoro molto meglio dei modelli ESL;
4. i modelli classici, come la CLT e la FSDT falliscono completamente l'analisi degli *shell* spessi;
5. l'uso dei modelli LW è necessario se si vuole descrivere accuratamente la distribuzione delle tensioni trasversali lungo lo spessore e soddisfare la condizione di continuità interlaminare;
6. l'uso dei modelli LW non è sufficiente per ottenere la continuità interlaminare delle tensioni nei casi con laminazione a (± 45), con condizioni al contorno di tipo *clamped-free*, con carichi concentrati. Per risolvere questo problema si deve introdurre l'uso di modelli misti come il metodo RMVT.

Nella seconda parte è stata condotta l'analisi statica di una piastra multistrato e di un cilindro compositi con strati in materiale piezoelettrico soggetti a carichi elettromeccanici. I risultati ottenuti sono stati organizzati in termini di spostamenti, potenziale elettrico, tensioni nel piano e tensioni trasversali e spostamento elettrico trasversale, per vari rapporti di spessore per vari rapporti di curvatura. Le prestazioni dell'elemento *shell* sono state verificate. Le conclusioni sono le seguenti:

1. l'elemento *shell* è completamente libero dal fenomeno del *locking* per qualsiasi rapporto di curvatura e spessore;
2. i risultati convergono alla soluzione esatta aumentando il numero degli elementi;
3. l'uso dei modelli LW con ordine di espansione elevati sono necessari se si vuole descrivere accuratamente la distribuzione delle tensioni trasversali e del potenziale elettrico lungo lo spessore e soddisfare la condizione di continuità interlaminare.

7.1 Prospettive

Il primo obiettivo di un futuro lavoro sarà l'analisi di strutture *shell* multistrato con strati in materiale piezoelettrico soggette a carichi elettromeccanici. Un secondo obiettivo sarà l'implementazione di un elemento *shell* con curvatura qualsiasi basato sulla CUF, che permette di analizzare strutture con geometria arbitraria.A questo nuovo elemento finito sarà applicato il metodo MITC per contrastare i fenomeni del *membrane and shear locking*

come già mostrato nel Capitolo 4.
Un altro obiettivo è quello di estendere il presente elemento finito *shell* ai modelli misti contenuti nella CUF per analizzare strutture con carichi termici e/o elettrici. In questo caso, l'uso della RMVT permette non solo il soddisfacimento dei requisiti C_z^0 per le tensioni trasversali, ma anche il contrasto del fenomeno del *locking*. Per cui, seguendo la stessa strategia del metodo MITC, le tensioni, che sono modellate a priori, possono essere opportunamente interpolate nel dominio dell'elemento usando punti che sono differenti dai punti di interpolazione degli spostamenti.
L'analisi dei risultati presentati in questo lavoro ha dimostrato la superiorità dei modelli *shell* avanzati e raffinati contenuti nella CUF per lo studio dei problemi multicampo rispetto alle teorie classiche.

Bibliografia

[1] Reddy, J.N., Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis, CRC Press, 2004, New York (USA).

[2] Jones, R.M., Mechanics of Composite Materials, Second Edition, Taylor & Francis, 1999, PA (USA).

[3] Gibson, R.F., Principle of Composite Material Mechanics, McGraw-Hill, 1994, New York (USA).

[4] Chopra, I., *Review of state of art of smart structures and integrated systems*, AIAA Journal, 40(11), 2145-2187, 2002.

[5] Rao, S.S., Sunar, M., *Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and controll of flexible structures: a survey*, Applied Mechanics Reviews, 47(4), 113-123, 1994.

[6] Carrera, E., *A class of two dimensional theories for multilaryed plates analysis*, Atti Accademia delle Scienze di Torino, Mem. Sci. Fis., 19-20, 49-87, 1995.

[7] Carrera, E., Brischetto, S., *Analysis of thickness locking in classical, refined and mixed multilayered plate theories*, Composites Structures, 82(4), 549-562, 2008.

[8] Carrera, E., Brischetto, S., *Analysis of thickness locking in classical, refined and mixed theories for layered shells*, Composites Structures, 85(1), 83-90, 2008.

[9] Murakami, H., *Laminated composite plate theory with improved in-plane responses*, Journal of Applied Mechanics, 53, 661-666, 1986.

[10] Leissa, A.W., Vibration of shells, NASA SP-288, 1973, Washington, D.C. (USA).

[11] Leissa, A.W., Vibration of plates, NASA SP-160, 1969, Washington, D.C. (USA).

[12] Carrera, E., Brischetto, S., *Piezoelectric shell theories with a priori continuous transverse electromechanical variables*, Journal of Mechanics of Materials and Structures, 2(2), 377-399, 2007.

[13] Carrera, E., Brischetto, S., Nali, P., *Variational statements and computational models for multifield problems and multilayered structures*, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 15(3), 182-198, 2008.

[14] Carrera, E., Boscolo, M., Robaldo, A., *Hierarchic multilayered plate elements for coupled multifield problems of piezoelectric adaptice structures: formulation and numerical assessment*, Archives of Computational Methods in Engineering, 14(4), 383-430, 2007.

[15] Altay, G.A., Dökmeci, M.C., *Fundamental variational equations of discontinuous thermopiezoelectric fields*, International Journal of Engineering Sciences, 34(7), 769-782, 1996.

[16] Nowinski, J.L., Theory of Thermoelasticity with Applications, Sijthoff & Noordhoff, 1978, The Netherlands.

[17] MacNeal, R.H., *Perspective on finite elements for shell analysis*, Finite Elements in Analysis and Design, 30, 175-186, 1998.

[18] Argyris, J.H., *Matrix displacement analysis of plates and shells, Prolegomena to a General Theory, Part I*, Ingeniur-Archiv, 35, 102-142, 1966.

[19] Monforton, G.R., Schmidt, L.A., *Finite element analyses of sandwich plates and cylindrical shells with laminated faces*, Proceedings of the Second Conference of Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFSL-TR-68-150, 573-308, 1968.

[20] Pryor, C.W., Barker, R.M., *A finite element analysis including transverse shear effect for applications to laminated plates*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 9, 912-917, 1971.

[21] Noor, A.K., *Finite Element Analysis of Anisotropic Plates*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 11, 289-307, 1972.

[22] Hughes, T.J.R., Tezduyar, T., *Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node isoparametric element*, Journal of Applied Mechanics, 48, 587-596, 1981.

[23] Panda, S.C., Natarajan, R., *Finite Element Analysis of Laminated Composites Plates*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 14, 69-79, 1979.

[24] Parisch, H., *A critical survey of the 9-node degenerated shell element with special emphasis on thin shell application and reduced integration*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 20, 323-350, 1979.

[25] Ferreira, A.J.M., Barbosa, J.T., Marques, A.T., De Sà, J.C., *Non-linear analysis of sandwich shells: the effect of core plasticity*, Computers & Structures, 76, 337-346, 2000.

[26] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Too, J.M., *Reduced intergration technique in general analysis of plates and shells*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 3, 275-290, 1973.

[27] Malkus, D.S., Hughes, T.J.R., *Mixed finite element methods - reduced and selective integration techniques: a unified concepts*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 15, 63-81, 1978.

[28] Chinosi, C., Della Croce, L., Scapolla, T., *Solving thin Naghdi shells with special finite elements*, Mathematical Modeling & Scientific Computing, 8, 231-240, 1997.

[29] Chinosi, C., Della Croce, L., Scapolla, T., *Hierarchic finite elements for thin Naghdi shell model*, International Journal of Solids and Structures, 35(16), 1863-1880, 1998.

[30] Naghdi, P.M., *The theory of shells and plates*, Handbuch der Physic, 4, 425-640, 1972, Springer, Berlin.

[31] Bathe, K.J., Dvorkin, E.N., *A four node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and mixed interpolation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21, 367-383, 1985.

[32] Brank, B., Carrera, E., *A Family of Shear-Deformable Shell Finite Elements for Composite Structures*, Computer & Structures, 76, 297-297, 2000.

[33] Arnold, D.N., Brezzi, F., *Locking-free finite element methods for shells*, Mathematics of Computation, 66(217), 1-14, 1997.

[34] Büchter, N., Ramm, E., *3d-extension of non-linear shell equations based on the enhanced assumed strain concept*, Computational Methods in Applied Sciences, 55-62, 1992, Hirsch C.(ed). Elsevier.

[35] Braun, M., Bischoff, M., Ramm, E., *Non linear shell formulations for complete three-dimensional constitutive laws including composites and laminates*, Computational Mechanics, 15, 1-18, 1994.

[36] Simo, J.C., Rafai, S., *A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 29, 1595-1638, 1990.

[37] Kant, T., Owen, D.R.J., Zienkiewicz, O.C., *Refined higher order C^0 plate bending element*, Computer & Structures, 15, 177-183, 1982.

[38] Kant, T., Kommineni, J.R., *Large Amplitude Free Vibration Analysis of Cross-Ply Composite and Sandwich Laminates with a Refined Theory and C0 Finite Elements*, Computer & Structures, 50, 123-134, 1989.

[39] Dau, F., Polit, O., Touratier, M., *An efficient C^1 finite element with continuity requirements for multilayered/sandwich shell structures*, Computer & Structures, 82, 1889-1899, 2004.

[40] Polit, O., Touratier, M., *A multilayered/sandwich triangular finite element applied to linear and non-linear analyses*, Composite Structures, 58, 121-128, 2002.

[41] Tessler, A., *A Higher-order plate theory with ideal finite element suitability*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineerings, 85, 183-205, 1991.

[42] Reddy, J.N., Mechanics of Laminated Composite Plates. Theory and Analysis, CRC Press, 1997, New York (USA).

[43] Palazotto, A.N., Dennis, S.T., Nonlinear analysis of shell structures. AIAA Series, 1992.

[44] Disciuva, M., Cicorello, A., Dalle Mura, E., *A class of multilayered anisotropic plate elements including the effects of transverse shear deformabilty*, Proceedings of AIDAA Conference, 877–892, 1985, Torino.

[45] Bekou, A., Touratier, M., *A Rectangular Finite Element for analysis composite multilayerd shallow shells in static, vibration and buckling*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 36, 627-653, 1993.

[46] Noor, A.K., Burton, W.S., *Assessment of computational models for multi-layered composite shells*, Applied Mechanics Review, 43, 67-97, 1990.

[47] Reddy, J.N., *An evaluation of equivalent single layer and layer-wise theories of composite laminates*, Composite Structures, 25, 21-35, 1993.

[48] Mawenya, A.S., Davies, J.D., *Finite element bending analysis of multilayer plates*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 8, 215-225, 1974.

[49] Pinsky, P.M., Kim, K.O., *A multi-director formulation for nonlinear elastic-viscoelastic layered shells*, Computers & Structures, 24, 901-913, 1986.

[50] Chaudhuri, R.A., Seide, P., *An approximate method for prediction of transverse shear stresses in a laminated shell*, International Journal of Solids and Structures, 23, 1145-1161, 1987.

[51] Rammerstorfer, F.G., Dorninger, K., Starlinger, A., *Composite and sandwich shells*, in Non-linear Analysis of Shells by Finite Elements, 131-194, 1992.

[52] Carrera, E., *Developments, ideas and evaluations based upon the Reissner's Mixed Theorem in the modelling of multilayered plates and shells*, Applied Mechanics Reviews, 54(4), 301-329, 2001.

[53] Carrera, E., *Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking*, Archives of Computational Methods in Engineering, 10(3), 215-296, 2003.

[54] Cinefra, M., Chinosi, C., Della Croce, L., *MITC9 shell elements based on refined theories for the analysis of isotropic cylindrical structures*, Mechanics of Advanced Materials and Structures, in press.

[55] Xiao-Ping Shu, "*A refined theory of laminated shells with higher-order transverse shear deformation*", Int. J. Solids Structures, Vol.34, No. 6, pp. 673-683, 1997

[56] Huang, N. N. (1994)., "*Influence of shear correction factors in the higher-order shear deformation laminated shell theory*", Int. J. Solids Structures, 31, 1263-1227.

[57] Xiao-Ping Shu, "*An improved simple higher-order theory for laminated composite shells*", Computers and Struct

[58] Ballhause D., D'Ottavio M., Kroplin B., Carrera E., "*A unified formulation to assess multilayered theories for piezoelectric plates*", Computers and Structures 83 (2005) 1217–1235

[59] Carrera E., Brischetto S., "*Piezoelectric shell theories with a priori continous transverse electromechanical variables*", Journal of Mechanics of materials and structures, Vol. 2, No. 2, 2007