POLITECNICO DI TORINO

I Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea Magistrale

# Modelli "component-wise" per analisi statica, dinamica e aeroelastica di strutture alari

**Relatori:**
Prof. Erasmo Carrera
Ing. Marco Petrolo

**Candidato:**
Alfonso Pagani

Dicembre 2011

*Alle persone a me più care*

# Indice


**1 Introduzione** **1**
1.1 Modelli Strutturali Unidimensionali . . . . . 1
1.2 Modelli CUF . . . . . 3
1.3 Contenuto dell'Elaborato . . . . . 4

**2 Preliminari** **7**
2.1 Tensioni e Deformazioni . . . . . 8
2.2 Relazioni Geometriche . . . . . 9
2.3 Equazioni Costitutive . . . . . 9
2.4 Poisson Locking . . . . . 10

**3 Formulazione Unificata** **12**
3.1 Espansione di Taylor, TE . . . . . 13
3.1.1 Le teorie classiche come caso particolare . . . . . 14
3.2 Espansione di Lagrange, LE . . . . . 14

**4 Formulazione FE** **18**
4.1 Matrice di Rigidezza . . . . . 19
4.2 Matrice delle Masse . . . . . 20
4.3 Vettore dei Carichi Nodali . . . . . 21
4.4 Equazioni di Equilibrio . . . . . 22
4.5 FEM Applicato a Espansioni TE e LE di Strutture Laminate . . . . . 23

**5 Strutture a Guscio Rinforzato** **25**
5.1 Il Semiguscio Ideale . . . . . 25
5.2 Il Semiguscio Puro . . . . . 27
5.3 La Trave a Semiguscio . . . . . 29
5.4 Cassone a Due Correnti e Un Pannello . . . . . 29
5.5 Cassone a Due Pannelli Allineati . . . . . 34
5.6 Cassone Rettangolare . . . . . 39
5.6.1 Implementazione dell'Irrigidimento Trasversale . . . . . 45

5.6.2 Considerazioni sullo Spessore della Centina . . . . . 49

**6 Analisi Statica di un Tronco Alare 54**
6.1 Risoluzione mediante Modelli Analitici . . . . . 55
6.2 Risoluzione mediante Modelli CUF . . . . . 60
6.3 Rimozione delle Centine . . . . . 67
6.4 Effetto di una Apertura . . . . . 74

**7 Analisi Modale 81**
7.1 Longherone a Tre Correnti . . . . . 81
7.2 Cassone Rettangolare senza Centina . . . . . 85
7.3 Cassone Rettangolare con Centina al *tip* . . . . . 88
7.4 Tronco Alare . . . . . 92
7.5 Tronco Alare senza Centine . . . . . 95
7.6 Tronco Alare con Apertura . . . . . 99

**8 Aeroelasticità: Fenomenologia e Formulazione 103**
8.1 Il Problema Aeroelastico . . . . . 105
8.1.1 Soluzione del Problema agli Autovalori Quadratico . . . . . 106
8.2 Strip Theory . . . . . 107
8.2.1 Divergenza Statica . . . . . 108
8.2.2 Flutter . . . . . 109

**9 Analisi dei Fenomeni di Divergenza 113**
9.1 Ala a Freccia Inversa . . . . . 113
9.2 Tronco Alare con e senza Centine . . . . . 116

**10 Conclusioni e Sviluppi Futuri 120**

**A Funizoni di Forma 123**
A.1 Elemento B2 . . . . . 123
A.2 Elemento B3 . . . . . 124
A.3 Elemento B4 . . . . . 124

**B Componenti dei Nuclei Fondamentali 126**
B.1 Matrice di Rigidezza . . . . . 126
B.2 Matrice delle Masse . . . . . 127

**Bibliografia 128**

# Capitolo 1

# Introduzione

## 1.1 Modelli Strutturali Unidimensionali

I modelli trave rappresentano uno strumento fondamentale per l'analisi strutturale. Il loro utilizzo nelle applicazioni aerospaziali trova giustificazione nella geometria allungata di molti componenti strutturali presenti in questo campo, come ali, fusoliere, pale d'elicottero e vettori spaziali.
L'interesse nelle teorie unidimensionali è principalmente dovuto alla loro semplicità e al loro basso costo computazionale rispetto a modelli 2D (piastre/gusci) e 3D (solidi).
Le teorie *beam* più conosciute sono le teorie classiche di Eulero-Bernoulli [20] e di Timoshenko [38], da qui in poi indicate rispettivamente con le sigle EBBM e TBM. Il modello EBBM presenta la formulazione più semplice possibile attribuibile ad una trave e considera una condizione di flessione pura senza tener conto delle deformazioni a taglio trasversale. Il modello TBM, invece, considera una distribuzione uniforme del taglio sulla sezione della trave ottenendo in questo modo una teoria più accurata. I risultati ottenuti con le teorie classiche presentano una buona approssimazione, ma sono limitati dalle ipotesi fondamentali che rendono tali modelli adatti solo per l'analisi a flessione di stutture allungate a sezione compatta e omogenea. Al contrario, l'analisi di travi tozze, a parete sottile o a sezione aperta richiede l'utilizzo di metodi più sofisticati. Si veda a tal proposito il lavoro di Novozhilov [29].
Nel corso degli anni sono state presentate numerose proposte per rendere il modello trave applicabile ad una più vasta famiglia di strutture mantenendo una approssimazione accettabile. Lo stesso Timoshenko [39, 40] cercò di definire un fattore correttivo che tenesse in considerazione i fenomeni non inclusi nel modello iniziale, come il taglio non costante e le deformazioni fuori dal piano. Tuttavia, come dimostrano i lavori di Kaneko [22] e Dong [16], tale via portò alla definizione di innumerevoli coefficienti al variare della definizione iniziale del fattore correttivo stesso.

Per superare i limiti delle teorie classiche si possono sviluppare teorie *higher-order*, modelli di ordine superiore che migliorano il campo di spostamenti.
In letteratura si trovano un gran numero di modelli rifiniti di trave. L'attenzione viene qui rivolta a quei lavori che sono maggiormente indirizzati all'analisi di travi isotrope, a parete sottile e a sezione trasversale aperta.
Un resoconto completo delle teorie della trave per l'analisi delle vibrazioni, della propagazione delle onde e dei fenomeni di buckling e post-buckling fu reso disponibile da Kapania e Raciti [23, 24] nel 1989. Un quadro generale sugli elementi finiti trave esistenti, invece, è stato fornito più recentemente da Reddy [32], il quale descrive elementi trave basati su teorie classiche e di ordine superiore, e discute i problemi legati allo *shear locking* e agli elementi *locking-free*.
Vinayak et alii hanno utilizzato un elemento trave *higer order* basato sulla teoria Lo-Christensen-Wu per studiare travi isotrope e composite, tozze e a parete sottile, in cui gli spostamenti in direzione assiale e trasversale vengono modellizzati tramite espansioni rispettivamente cubiche e paraboliche.
Diversi lavori relativi alla valutazione del coefficiente correttivo del taglio sono stati presentati da Gruttmann et alii [25], Gruttmann e Wagner [26], e Wagner e Gruttmann [43]. Sono molti i problemi strutturali che vengono qui trattati: tensioni di taglio torsionali e flessionali in travi prismatiche, sezioni trasversali arbitrarie, strutture a parete sottile e spessa, e l'influenza del coefficiente di Poisson sul fattore di correzione del taglio.
Nel 1999 fu proposta da Jönsson [27] una teoria distorsionale per travi in parete sottile, in cui il modo di deformazione distorsionale venne incluso nelle assunzioni cinematiche classiche della teoria di Vlasov permettendogli di studiare il ruolo della distorsione della sezione trasversale considerando diverse sezioni, aperte e chiuse, soggette a carichi statici.
Petrolito [31] e Eisenberger [17] si sono interessati all'analisi della matrice di rigidezza esatta di un elemento finito trave *higher-order*: il campo di spostamenti rifinito si basva su una variazione cubica dello spostamento assiale sulla sezione trasversale della trave, mentre lo spostamento laterale era considerato costante. In questi lavori si sono fatti anche confronti con i modelli classici ed è stata messa in luce l'importanza dei termini di ordine elevato nello studio di travi tozze.
Più recentemente Dinis [15] e Silvestre [37] hanno studiato il comportamento a buckling di travi a sezione aperta o chiusa in parete sottile: la *Generalized Beam Theory* (GBT) viene usata per implementare teorie della trave che tengano conto delle deformazioni planari della sezione trasversale, ottenendo risultati paragonabili a quelli ottenuti tramite modelli 2D *shell* utilizzando appropriate funzioni di forma sulla sezione che descrivano il campo di spostamenti; la scelta delle funzioni di forma dipende in maniera diretta dalla geometria delle strutture considerate.
La teoria GBT è stata usata anche da Rendek e Baláž [34] per l'analisi statica di travi in parete sottile, i cui risultati sono stati confrontati con quelli ottenuti per via

sperimentale.
El Fatmi [18, 19] propose nel 2007 una teoria della trave con una distribuzione del *warping* non uniforme. Egli adottò un modello cinematico che considera costante la forma della sezione trasversale; vennero studiati gli effetti di *warping* su travi compatte e vuote con sezione aperta o chiusa, e particolare attenzione venne rivolta all'analisi delle tensioni di taglio e assiali. La teoria proposta si dimostrò essere molto efficace, specialmente con travi aperte e tozze.
Un altro interessante lavoro sulle distribuzioni non uniformi del *warping* è quello di Saadé et alii [36]; viene qui data una dettagliata descrizione del problema del warping e vengono effettuate diverse analisi, sia statiche che a buckling.
Un approccio differente per rifinire un modello strutturale è basato sul metodo asintotico, in cui un parametro caratteristico (ad esempio lo spessore della sezione trasversale per una trave) è sfruttato per costruire serie asintotiche, e quei termini che presentano lo stesso ordine di grandezza del parametro, quando questo va a zero, vengono conservati. Esempi significativi di modelli trave costruiti con i metodi asintotici sono dati da Yu et alii [45] e da Yu e Hodges [44].

## 1.2 Modelli CUF

La presenza di tutti questi lavori in letteratura mostra l'estremo interesse nel cercare teorie rifinite della trave sempre migliori.
Il lavoro qui presentato ricade nel contesto della *Formulazione Unificata di Carrera*, CUF, sviluppata durante l'ultima decade dal suo primo autore e dai suoi collaboratori.
Questa formulazione era originariamente rivolta allo sviluppo di teorie rifinite riguardanti piastre e gusci [3, 4]. Recentemente questi modelli sono stati estesi alla modellizzazione di strutture trave da Carrera e Giunta [6].
La CUF è una formulazione gerarchica che considera l'ordine della teoria come un inpunt dell'analisi. Ciò ci permette di trattare un grande varietà di problemi strutturali, senza avere la necessità di introdurre formulazioni pensate *ad hoc*.
Gli effetti cosiddetti non-classici, come ad esempio il warping, le deformazioni planari, gli effetti di taglio, l'accoppiamento flesso-torsionale, vengono presi in considerazione semplicemente aumentando in modo opportuno l'ordine del modello adottato.
Per trattare geometrie, condizioni di vincolo e carichi arbitrari, ci si avvale della formulazione agli elementi finiti.
Originariamente la teoria era basata sull'utilizzo di polinomi tipo Taylor per definire il campo di spostamenti sulla sezione trasversale della trave.
Analisi statiche, si veda il lavoro di Carrera et alii [7, 14], hanno mostrato l'efficacia della CUF alle prese con fenomeni di warping, di deformazioni nel piano e con effetti

dovuti al taglio. Contemporaneamente analisi modali [10, 12] hanno dimostrato la capacità di questa teoria rifinita di trave di rilevare modi di vibrare di tipo *shell* senza la necessità di ricorrere ai lenti modelli 2D o 3D. È stato condotto anche un efficace studio da Carrera e Petrolo [8] per evidenziare il ruolo di ogni termine *higher-order* in dati problemi strutturali.
Come vedremo l'uso dei polinomi di Taylor presenta alcune limitazioni intrinseche, dovute principalmente al fatto che i termini dell'espansione del campo di spostamenti non hanno sempre un significato fisico. Per superare questi problemi sono state recentemente implementate nuove teorie della trave [9], le quali descrivono il campo di spostamenti della sezione trasversale con polinomi tipo Lagrange. La scelta di queste espansioni ci porta ad avere solo variabili di spostamento.
Il lavoro svolto in questa tesi mostrerà come tale scelta, oltre a portare molti benefici in termini di versatilità dei modelli strutturali, consente di trovare risultati ancora migliori dei modelli basati su espansioni polinomiali di Taylor, riuscendo a cogliere fenomeni che altrimenti sarebbero individuabili solo tramite modelli 2D o 3D.
Inoltre, la possibilità di modellizzare i singoli componenti di una data struttura con un numero arbitrario di elementi tipo Lagrange, ci permetterà di focalizzare le analisi in zone prestabilite. Si pensi ad esempio ad un corpo tridimensionale soggetto ad un carico concentrato. Infittendo la sezione trasversale con un maggior numero di elementi in corrispondenza del carico, saremo in grado di studiare fenomeni e deformazioni locali. Oppure, nello studio di strutture composite, discretizzando la singola fibra con un elemento *Lagrange-type* potremo analizzarne il comportamento. Per non parlare dello studio di gusci nervati. Attualmente questi vengono progettati tramite codici commerciali modellizzando il guscio con elementi 2D *shell* e le nervature con elementi 1D *beam*. L'applicazione dei modelli *component-wise* a queste particolari strutture, di estremo interesse in campo aerospaziale, permetterebbe lo studio dell'intera struttura tramite l'analisi di un modello unidimensionale, in cui la sezione trasversale di ogni componente, guscio o nervatura che sia, verrebbe discretizzata con un singolo elemento Lagrange. Ciò porterebbe ad un elevatissimo risparmio del numero di gradi di libertà coinvolto nel calcolo, senza perdere in termini di affidabilità dei risultati. Al contrario, i risultati che si otterebbero sarebbero paragonabili a quelli derivanti da modelli SOLID.

## 1.3 Contenuto dell'Elaborato

La prima parte di questo lavoro è interamente dedicata alla descrizione e alla validazione del modello trave CUF.
Il Capitolo 2 si pone l'obiettivo di esplicare le nozioni fondamentali della teoria dell'elasticità. Si descrive il sistema di riferimento adottato nell'intero lavoro e si definiscono campo di spostamenti, tensioni e deformazioni. Le relazioni geometriche

e le equazioni costitutive del materiale vengono rielaborate per la successiva trattazione. Il capitolo si chiude con la descrizione del fenomeno del *Poisson Locking* e di come questo possa essere arginato.
Il Capitolo 3 rappresenta l'anima della formulazione. Viene introdotta l'approssimazione unidimensionale basata su espansioni di generiche funzioni $F_\tau$. Queste, come anticipato, possono essere costituite da polinomi tipo Taylor o tipo Lagrange. La trattazione approfondisce le differenze che comporta la scelta sul tipo di funzione approssimante e mostra come i modelli classici, EBBM e TBM, siano ottenibili come casi particolari della formulazione CUF.
Introdotto il modello cinematico, il Capitolo 4 presenta la formulazione agli elementi finiti come valido strumento di calcolo. Questo metodo ci permetterà di trovare soluzioni approssimate per geometrie, carichi e vincoli arbitrari. Il calcolo della matrice di rigidezza, della matrice delle masse e del vettore dei carichi nodali si presenta sotto forma di calcolo dei *nuclei fondamentali* tramite il *Principio dei Lavori Virtuali*. Vedremo come l'assemblaggio di questi nuclei porta alla scrittura finale delle equazioni di equilibrio, la risoluzione delle quali ci permette di valutare le incognite nodali.
Con il Capitolo 5 si sancisce l'inizio della validazione del modello strutturale trave. Le strutture oggetto di studio sono rappresentate da strutture a guscio rinforzato, di ampio utilizzo in campo aerospaziale. Vengono riportati i risultati di analisi statiche di una buona varietà di configurazioni classiche, e confrontati con modelli analitici basati sul *Semiguscio ideale* e con modelli computazionali agli elementi finiti 2D e 3D analizzati tramite il codice commerciale NASTRAN©. Particolare attenzione viene rivolta all'analisi di un cassone rettangolare a quattro correnti e all'effetto degli irrigidimenti trasversali sullo stesso.
Nel Capitolo 6 si effettua l'analisi statica di un tronco alare completo. Si discute degli effetti delle centine e si mostra come i modelli *component wise* siano in grado di prevedere correttamente il comportamento della struttura in seguito all'aggiunta di un apertura sul ventre alare.
Il Capitolo 7 si occupa dell'analisi modale delle configurazioni strutturali più significative. La trattazione consiste nello studio delle frequenza naturali e dei modi propri di vibrare di tali strutture e nel confronto dei risultati con modelli NASTRAN©.
La seconda parte di questo documento viene, invece, dedicata alla descrizione, alla formulazione matematica e all'analisi dei fenomeni aeroelastici.
Validato il modello strutturale, nel Capitolo 8, dopo aver discusso dei fenomeni aeroelastici e dell'importanza che questi hanno avuto nel progresso delle tecniche di progettazione nel campo aeronautico, si propone la formulazione matematica del tipico problema di stabilità aeroelastica. Viene poi presentata una semplice teoria aerodinamica, la *strip theory*, e si calcolano i nuclei fondamentali delle matrici di rigidezza e smorzamento aerodinamiche.

Il Capitolo 9 riporta i risultati delle analisi a divergenza statica per due configurazioni strutturali: un'ala a freccia inversa e il tronco alare analizzato nei precedenti capitoli.
Infine nel Capitolo 10 si riassumono le considerazioni più importanti derivanti dall'analisi dei risultati ottenuti nel corso di tutto il lavoro. Le dovute conclusioni saranno fatte dopo una sinossi che mira a sintetizzare i pro e i contro dei modelli utilizzati, ponendo particolare attenzione ai possibili campi applicativi che potranno essere studiati nel futuro prossimo.

# Capitolo 2

# Preliminari

In questo capitolo si tracciano le basi per la trattazione successiva della formulazione unificata della trave. Si parte dall'illustrare le convenzioni di notazione seguite nel prosieguo della tesi. Ovviamente la scelta degli assi di riferimento per la geometria tridimensionale è arbitraria, dettata la massimo da motivi di convenienza o abitudine.
Una trave è una struttura che presenta una dimensione, chiamata estensione assiale della trave $L$, predominante rispetto ad ogni altra dimensione ortogonale ad essa. Introduciamo il vettore trasposto degli spostamenti:

$$\mathbf{u}(x, y, z; t) = \left\{ \begin{array}{ccc} u_x & u_y & u_z \end{array} \right\}^T \tag{2.1}$$

dove $x$, $y$, e $z$ sono assi ortonormali, come mostrato in Fig. 2.1, mentre $u_x$, $u_y$ e $u_z$ sono le componenti di spostamento. In generale queste sono funzioni delle coordinate spaziali e del tempo $t$. Intersecando la trave con un piano ortogonale all'asse si

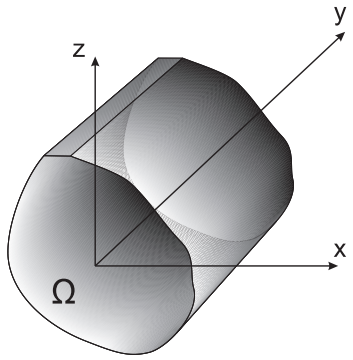



Figura 2.1. Geometria della trave e sistema di riferimento.

identifica la sezione trasversale della struttura $\Omega$. La terna di assi Cartesiani è disposta in modo tale che $x$ e $z$ giacciono sulla sezione della trave, mentre $y$ ne

identifica l'asse longitudinale in modo che $0 \leq y \leq L$. In generale, l'origine del sistema di riferimento $O$ può giacere al di fuori del contorno della sezione trasversale, la quale è considerata costante lungo l'asse della struttura.

## 2.1 Tensioni e Deformazioni

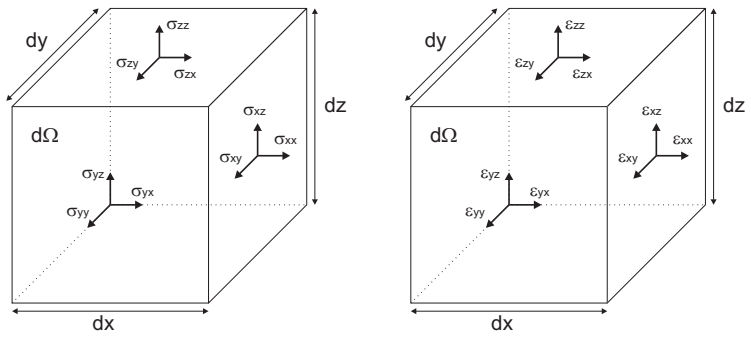
Introdotto il riferimento geometrico, passo successivo è la definizione di deformazioni e tensioni, raggruppate in due gruppi come di seguito esposto, in modo da trattare separatamente fenomeni trasversali e planari. Deformazioni e tensioni sono fondamentali nella presente formulazione unificata, in quanto la scrittura dei suoi nuclei si basa sul *Principio dei Lavori Virtuali*, per il quale queste grandezze sono coinvolte in integrali sul volume della struttura.
Il vettore delle tensioni $\boldsymbol{\sigma}$ e il vettore delle deformazioni $\boldsymbol{\epsilon}$ contengono le componenti mostrate in Fig. 2.2, e sono:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \left\{ \begin{array}{cccccc} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{yz} & \sigma_{xz} & \sigma_{xy} \end{array} \right\}^T \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \left\{ \begin{array}{cccccc} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{zz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{xz} & \epsilon_{xy} \end{array} \right\}^T \end{aligned} \tag{2.2}$$

i cui termini possono essere raggruppati come segue:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_p &= \left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_{zz} & \sigma_{xx} & \sigma_{zx} \end{array} \right\}^T, \quad \boldsymbol{\epsilon}_p = \left\{ \begin{array}{ccc} \epsilon_{zz} & \epsilon_{xx} & \epsilon_{zx} \end{array} \right\}^T \\ \boldsymbol{\sigma}_n &= \left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_{zy} & \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{array} \right\}^T, \quad \boldsymbol{\epsilon}_n = \left\{ \begin{array}{ccc} \epsilon_{zy} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} \end{array} \right\}^T \end{aligned} \tag{2.3}$$

dove il pedice "$n$" indica quei termini che giacciono sulla sezione trasversale, mentre "$p$" sta a indicare i termini che agiscono su piani ortogonali a $\Omega$.




(a) Tensioni. (b) Deformazioni.

Figura 2.2. Componenti di Tensione (a) e Deformazione (b).

## 2.2 Relazioni Geometriche

Nel caso di piccoli spostamenti nei confronti di una dimensione caratteristica della sezione trasversale della trave, le relazioni tra deformazioni e spostamenti possono essere supposte lineari. Con riferimento all'Eq. 2.3, possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_n &= \left\{ \begin{array}{ccc} u_{z,y} + u_{y,z} & u_{x,y} + u_{y,x} & u_{y,y} \end{array} \right\}^T \\ \boldsymbol{\epsilon}_p &= \left\{ \begin{array}{ccc} u_{z,z} & u_{x,x} & u_{z,x} + u_{x,z} \end{array} \right\}^T \end{aligned} \tag{2.4}$$

dove la virgola assume il significato di derivazione rispetto alla coordinata che la segue. Per comodità si adotta una notazione differenziale matriciale di fondamentale utilità nella ricavazione successiva dei nuclei. Tali matrici contengono operatori differenziali solo di primo ordine, essendo questo il caso di analisi lineare.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_n &= \boldsymbol{D}_n \mathbf{u} = (\boldsymbol{D}_{np} + \boldsymbol{D}_{ny})\mathbf{u} \\ \boldsymbol{\epsilon}_p &= \boldsymbol{D}_p \mathbf{u} \end{aligned} \tag{2.5}$$

in cui $\boldsymbol{D}_{np}$, $\boldsymbol{D}_{ny}$ e $\boldsymbol{D}_p$ sono operatori differenziali matriciali e vengono riportati di seguito.

$$\boldsymbol{D}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_{np} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_{ny} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.3 Equazioni Costitutive

Infine, le equazioni costitutive per materiale ortotropo rappresentano il legame tra tensioni e deformazioni. Ipotizzando un comportamento elastico lineare del materiale cui è composta la trave, vale la legge di Hooke, che in forma vettoriale compatta si presenta come segue:

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{\epsilon} \tag{2.6}$$

Considerata l'Eq. 2.3, la precedente equazione diventa:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_p &= \tilde{\boldsymbol{C}}_{pp}\boldsymbol{\epsilon}_p + \tilde{\boldsymbol{C}}_{pn}\boldsymbol{\epsilon}_n \\ \boldsymbol{\sigma}_n &= \tilde{\boldsymbol{C}}_{np}\boldsymbol{\epsilon}_p + \tilde{\boldsymbol{C}}_{nn}\boldsymbol{\epsilon}_n \end{aligned} \tag{2.7}$$

In cui $\tilde{\boldsymbol{C}}_{pp}$, $\tilde{\boldsymbol{C}}_{pn}$, $\tilde{\boldsymbol{C}}_{np}$ e $\tilde{\boldsymbol{C}}_{nn}$ sono le matrici dei coefficienti del materiale. I coefficienti localizzati nelle matrici seguono le formule ben note di trasformazione da piano

materiale a piano fisico. Inoltre, essi dipendono unicamente dal materiale adottato e dall'orientamento del piano materiale nei confronti del sistema di riferimento fisico. Le espressioni esplicite delle matrici dei coefficienti del materiale sono riportate di seguito.

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}_{pp} = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_{11} & \widetilde{C}_{12} & 0 \\ \widetilde{C}_{12} & \widetilde{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{C}_{44} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{C}}_{pn} = \widetilde{\boldsymbol{C}}_{np}^{T} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{C}_{16} & \widetilde{C}_{13} \\ 0 & \widetilde{C}_{26} & \widetilde{C}_{23} \\ \widetilde{C}_{45} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}_{nn} = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_{55} & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{C}_{66} & \widetilde{C}_{36} \\ 0 & \widetilde{C}_{36} & \widetilde{C}_{33} \end{bmatrix}$$

I coefficienti $\tilde{C}_{ij}$ dipendono dal modulo di Young, $E$, e dal coefficiente di Poisson, $\nu$, oltre che dall'angolo di orientamento delle fibre $\theta$, il quale è graficamente definito in Fig. 2.3 dove '1', '2', e '3' rappresentano gli assi cartesiani del materiale. Per motivi

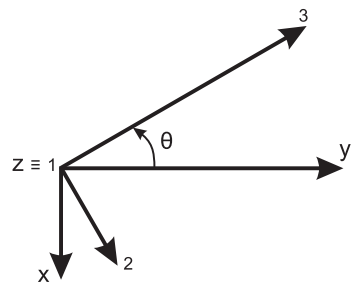



Figura 2.3. Orientamento delle fibre.

di brevità, le espressioni dei coefficienti $\tilde{C}_{ij}$ non sono riportate, ma possono essere trovate nei libri di Reddy [33] o di Tsai [41].

## 2.4 Poisson Locking

I modelli che presentano distribuzioni costanti e lineari delle componenti di spostamento planari $u_x$ e $u_z$, richiedono coefficienti del materiale modificati per far fronte al *Poisson locking* (PL).
La mancanza di accuratezza è dovuta all'accoppiamento tra le deformazioni ortogonali lungo le coordinate spaziali $x$, $y$, e $z$ quantificato dai coefficienti di Poisson:

$$\nu_{ij} = -\frac{\epsilon_{jj}}{\epsilon_{ii}}, \qquad i, j = x, y, z \tag{2.8}$$

Le teorie classiche per le piastre correggono il PL imponendo nulle le componenti di tensione normale trasverse. Questa ipotesi porta a calcolare i coefficienti ridotti del

materiale da implementare poi nella legge di Hooke per le componenti di tensione e deformazione planari. Per la teoria della trave, la correzione del PL è ottenuta alla stessa maniera. Con riferimento alla legge di Hooke (Eq. 2.6) si impongono nulle le tensioni $\sigma_{xx}$ e $\sigma_{zz}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \tilde{C}_{12}\epsilon_{zz} + \tilde{C}_{22}\epsilon_{xx} + \tilde{C}_{26}\epsilon_{xy} + \tilde{C}_{23}\epsilon_{yy} = 0 \\ \sigma_{zz} &= \tilde{C}_{11}\epsilon_{zz} + \tilde{C}_{12}\epsilon_{xx} + \tilde{C}_{16}\epsilon_{xy} + \tilde{C}_{13}\epsilon_{yy} = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Si trova un sistema algebrico lineare nelle incognite $\epsilon_{xx}$ e $\epsilon_{zz}$, da cui si ottiene la seguente soluzione:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= -\frac{\tilde{C}_{12}\tilde{C}_{13}-\tilde{C}_{11}\tilde{C}_{23}}{\tilde{C}_{12}^2-\tilde{C}_{11}\tilde{C}_{22}}\epsilon_{yy} - \frac{\tilde{C}_{12}\tilde{C}_{16}-\tilde{C}_{11}\tilde{C}_{26}}{\tilde{C}_{12}^2-\tilde{C}_{11}\tilde{C}_{22}}\epsilon_{xy} \\ \epsilon_{zz} &= -\frac{\tilde{C}_{12}\tilde{C}_{23}-\tilde{C}_{22}\tilde{C}_{16}}{\tilde{C}_{12}^2-\tilde{C}_{11}\tilde{C}_{22}}\epsilon_{yy} - \frac{\tilde{C}_{12}\tilde{C}_{26}-\tilde{C}_{16}\tilde{C}_{22}}{\tilde{C}_{12}^2-\tilde{C}_{11}\tilde{C}_{22}}\epsilon_{xy} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Sostituendo queste nelle espressioni di $\sigma_{yy}$ e $\sigma_{xy}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \tilde{C}_{13}\epsilon_{zz} + \tilde{C}_{23}\epsilon_{xx} + \tilde{C}_{36}\epsilon_{xy} + \tilde{C}_{33}\epsilon_{yy} = Q_{33}\epsilon_{yy} + Q_{36}\epsilon_{xy} \\ \sigma_{xy} &= \tilde{C}_{16}\epsilon_{zz} + \tilde{C}_{26}\epsilon_{xx} + \tilde{C}_{66}\epsilon_{xy} + \tilde{C}_{36}\epsilon_{yy} = Q_{36}\epsilon_{yy} + Q_{66}\epsilon_{xy} \end{aligned} \tag{2.11}$$

si ottengono i coefficienti ridotti del materiale:

$$\begin{aligned} Q_{33} &= \tilde{C}_{33} - \tilde{C}_{13}\frac{\tilde{C}_{12}\tilde{C}_{23}-\tilde{C}_{22}\tilde{C}_{16}}{\tilde{C}_{12}^2-\tilde{C}_{11}\tilde{C}_{22}} - \tilde{C}_{23}\frac{\tilde{C}_{12}\tilde{C}_{13}-\tilde{C}_{11}\tilde{C}_{23}}{\tilde{C}_{12}^2-\tilde{C}_{11}\tilde{C}_{22}} \\ Q_{36} &= \tilde{C}_{36} - \tilde{C}_{13}\frac{\tilde{C}_{12}\tilde{C}_{26}-\tilde{C}_{16}\tilde{C}_{22}}{\tilde{C}_{12}^2-\tilde{C}_{11}\tilde{C}_{22}} - \tilde{C}_{23}\frac{\tilde{C}_{12}\tilde{C}_{16}-\tilde{C}_{11}\tilde{C}_{26}}{\tilde{C}_{12}^2-\tilde{C}_{11}\tilde{C}_{22}} \\ Q_{66} &= \tilde{C}_{66} - \tilde{C}_{16}\frac{\tilde{C}_{12}\tilde{C}_{26}-\tilde{C}_{16}\tilde{C}_{22}}{\tilde{C}_{12}^2-\tilde{C}_{11}\tilde{C}_{22}} - \tilde{C}_{26}\frac{\tilde{C}_{12}\tilde{C}_{16}-\tilde{C}_{11}\tilde{C}_{26}}{\tilde{C}_{12}^2-\tilde{C}_{11}\tilde{C}_{22}} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Nel caso di materiale isotropo le rigidezze ridotte si semplificano come segue:

$$Q_{33} = E, \qquad Q_{36} = 0, \qquad Q_{66} = G = \frac{E}{2\,(1+\nu)} \tag{2.13}$$

dove $G$ rappresenta il modulo di elasticità tengenziale.
Per un analisi più chiara degli effetti del *Poisson locking* si veda il lavoro di Carrera e Brischetto [5].

# Capitolo 3

# Formulazione Unificata

Questo e il capitolo successivo rappresentano il cuore del problema strutturale. Il modello trave trattato rappresenta un modello avanzato mono - dimensionale con cinematica (gerarchica) variabile e si basa sulla ormai nota *Formulazione Unificata di Carrera* (CUF). Essa è una procedura sistematica in grado di costruire modelli strutturali avanzati, considerando l'ordine della teoria come un parametro libero della formulazione. Viene così introdotto uno schema di tipo gerarchico, che riprende l'applicazione della CUF per piastre e gusci presenti in letteratura. La *Refined Theory* per la trave esprime lo spostamento di un punto generico nello spazio 3D come un espansione di generiche funzioni $F_\tau$:

$$\mathbf{u}(x, y, z; t) = F_\tau(x, z)\mathbf{u}_\tau(y; t), \qquad \tau = 1,2, ...., M \tag{3.1}$$

dove le funzioni di approssimazione $F_\tau$ variano sulla sezione trasversale di coordinata $y$. $\mathbf{u}_\tau$ rappresenta il vettore degli spostamenti generalizzati, mentre $M$ indica il numero di termini dell'espansione ed è il parametro libero che determina l'accuratezza della teoria. In accordo con la notazione di Einstein, il pedice ripetuto, $\tau$, indica una sommatoria.
Essendo le dimensioni della sezione nettamente inferiori rispetto alla lunghezza della trave, allora l'andamento delle incognite lungo $x$ e $z$ può essere postulato a priori mediante le $F_\tau$. La scelta di queste funzioni determina la classe del modello CUF unidimensionale. Nel presente lavoro sono considerati due casi: un espansione basata sui polinomi di Taylor, nel seguito indicata con TE, ed una basata sui polinomi di Lagrange, indicata con LE.
Con la procedura descritta, la complicazione legata ai termini di ordine superiore respetto alle teorie classiche è affrontata in maniera sistemistica, valida per il generico ordine di espansione e per generiche funzioni di apprissimazione $F_\tau$. Inoltre, i modelli classici sono ottenibili come casi particolari della formulazizone unificata, apportando le opportune semplificazioni descritte nel seguito. Per esse è attivata

però la correzione del fenomeno del *Poisson locking*, atta a ridurre opportunamente i coefficienti di rigidezza.

## 3.1 Espansione di Taylor, TE

I modelli mono - dimensionali TE sono basati su espansioni polinomiali, $x^i\ z^j$, del campo degli spostamenti sulla sezione trasversale della struttura, dove $i$ e $j$ sono numeri interi positivi. Un generico campo degli spostamenti di ordine $N$ è espresso quindi dalle seguenti relazioni:

$$
\begin{aligned}
u_x &= \sum_{N_i=0}^{N} \left( \sum_{M=0}^{N_i} x^{N-M}\ z^M\ u_{x_{\frac{N(N+1)+M+1}{2}}} \right) \\
u_y &= \sum_{N_i=0}^{N} \left( \sum_{M=0}^{N_i} x^{N-M}\ z^M\ u_{y_{\frac{N(N+1)+M+1}{2}}} \right) \\
u_z &= \sum_{N_i=0}^{N} \left( \sum_{M=0}^{N_i} x^{N-M}\ z^M\ u_{z_{\frac{N(N+1)+M+1}{2}}} \right)
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

L'ordine $N$ dell'espansione è un parametro arbitrario ed è imposto come input dell'analisi. La scelta di $N$, per un dato problema strutturale, è solitamente fatta sulla base di uno studio di convergenza. Nel presente lavoro vengono considerati solo modelli TE di ordine completo dal momento che, fissato $N$, tutti i termini dell'espansione corrispondente sono dati. Ad esempio, il modello TE di secondo ordine, $N = 2$, presenta il seguente modello cinematico:

$$
\begin{aligned}
u_x &= u_{x_1} + x\ u_{x_2} + z\ u_{x_3} + x^2\ u_{x_4} + xz\ u_{x_5} + z^2\ u_{x_6} \\
u_y &= u_{y_1} + x\ u_{y_2} + z\ u_{y_3} + x^2\ u_{y_4} + xz\ u_{y_5} + z^2\ u_{y_6} \\
u_z &= u_{z_1} + x\ u_{z_2} + z\ u_{z_3} + x^2\ u_{z_4} + xz\ u_{z_5} + z^2\ u_{z_6}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Il modello mono - dimensionale descritto dall'Eq. 3.3 presenta 18 variabili di spostamento generalizzate: tre costanti, sei lineari e nove termini parabolici. Si possono ottenere anche modelli con un ridotto numero di termini, come mostrato in un recente lavoro di Carrera e Petrolo [8].
L'uso di espansioni basate sui polinomi di Taylor presenta delle limitazioni intrinseche: le variabili introdotte hanno un significato matematico (derivate spaziali rispetto agli assi della trave); i termini di ordine superiore non presentano un significato locale, ma possono descrivere solo le proprietà della sezione; l'estensione ad una formulazione che presenta grandi rotazioni può presentare difficoltà. Per far fronte a questi problemi, è stato recentemente implementato e testato, nella formulazione

oggetto di tale tesi, l'uso dei polinomi di Lagrange come funzioni approssimanti sulla sezione della trave.

### 3.1.1 Le teorie classiche come caso particolare

I modelli TE offrono la possibilità di ricavare i modelli classici della trave, EBBT *(Eulero - Bernoulli Beam Theory)* e TBT *(Timoshenko Beam Theory)*, come casi particolari dell'espansione lineare, $N = 1$. Il modello TBT può essere ottenuto agendo sull'espansione $F_\tau$. Sono due le condizioni da imporre.

1. Un campo cinematico approssimato con un espansione di primo ordine:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x_1} + x\ u_{x_2} + z\ u_{x_3} \\ u_y &= u_{y_1} + x\ u_{y_2} + z\ u_{y_3} \\ u_z &= u_{z_1} + x\ u_{z_2} + z\ u_{z_3} \end{aligned} \tag{3.4}$$

2. Le componenti di spostamento $u_x$ e $u_z$ devono essere costanti sulla sezione trasversale della struttura:

$$u_{x_2} = u_{z_2} = u_{x_3} = u_{z_3} = 0 \tag{3.5}$$

Il modello EBBT richiede una ulteriore terza condizione, che si presenta come la penalizzazione dei termini $\epsilon_{xy}$ e $\epsilon_{zy}$. Tale condizione può essere imposta usando un valore di penalità $\chi$ per i coefficienti $\tilde{C}_{55}$ e $\tilde{C}_{66}$ nelle equazioni costitutive.

## 3.2 Espansione di Lagrange, LE

I modelli LE sfruttano i polinomi di Lagrange per formulare teorie mono - dimensionali di ordine superiore. In questo lavoro sono stati adottati due tipi di set polinomiali sulla sezione trasversale: elementi a nove punti, L9, e elementi a sedici punti, L16. Sfruttando una formulazione isoparametrica siamo in grado di gestire geometrie dalla forma arbitraria. Le funzioni di interpolazione dell'elemento L9 sono date da [30]:

$$\begin{aligned} F_\tau &= \tfrac{1}{4}(r^2 + r\ r_\tau)(s^2 + s\ s_\tau) \qquad \tau = 1{,}3{,}5{,}7 \\ F_\tau &= \tfrac{1}{2}s_\tau^2(s^2 - s\ s_\tau)(1 - r^2) + \tfrac{1}{2}r_\tau^2(r^2 - r\ r_\tau)(1 - s^2) \qquad \tau = 2{,}4{,}6{,}8 \\ F_\tau &= (1 - r^2)(1 - s^2) \qquad \tau = 9 \end{aligned} \tag{3.6}$$

dove $r$ e $s$ variano tra $-1$ e $+1$. La Fig. 3.1a mostra la posizione dei punti, mentre la

| Punto | $r_\tau$ | $s_\tau$ |
|---|---|---|
| 1 | $-1$ | $-1$ |
| 2 | 0 | $-1$ |
| 3 | 1 | $-1$ |
| 4 | 1 | 0 |
| 5 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 1 |
| 7 | $-1$ | 1 |
| 8 | $-1$ | 0 |
| 9 | 0 | 0 |

Tabella 3.1. Coordinate naturali dei punti dell'elemento L9.

Tabella 3.1 riporta le coordinate naturali dei nove punti che costituiscono l'elemento. Il campo degli spostamenti dato da un elemento L9 è:

$$\begin{aligned} u_x &= F_1\, u_{x_1} + F_2\, u_{x_2} + F_3\, u_{x_3} + F_4\, u_{x_4} + F_5\, u_{x_5} + \\ &\quad + F_6\, u_{x_6} + F_7\, u_{x_7} + F_8\, u_{x_8} + F_9\, u_{x_9} \\ u_y &= F_1\, u_{y_1} + F_2\, u_{y_2} + F_3\, u_{y_3} + F_4\, u_{y_4} + F_5\, u_{y_5} + \\ &\quad + F_6\, u_{y_6} + F_7\, u_{y_7} + F_8\, u_{y_8} + F_9\, u_{y_9} \\ u_z &= F_1\, u_{z_1} + F_2\, u_{z_2} + F_3\, u_{z_3} + F_4\, u_{z_4} + F_5\, u_{z_5} + \\ &\quad + F_6\, u_{z_6} + F_7\, u_{z_7} + F_8\, u_{z_8} + F_9\, u_{z_9} \end{aligned} \tag{3.7}$$

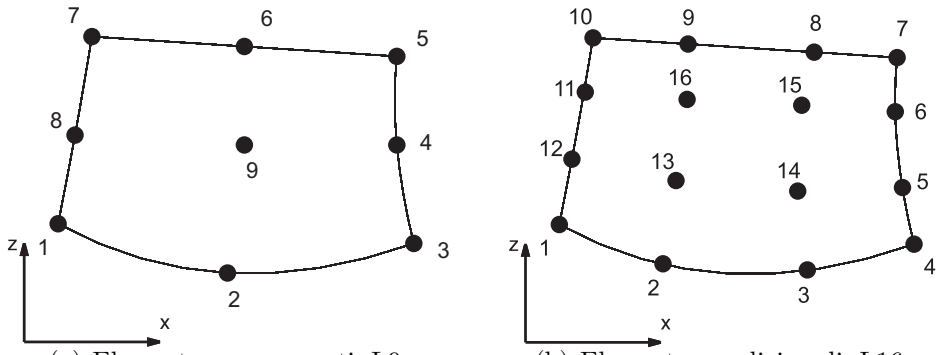
dove $u_{x_1}, ..., u_{z_9}$ sono le variabili di spostamento del problema e rappresentano le componenti di spostamento traslazionale di ognuno dei nove punti dell'elemento. Ciò anticipa un concetto di fondamentale utilità che rende i modelli LE estremamente versatili.
Le funzioni polinomiali dell'elemento L16 sono date da:

$$F_{\tau_{IJ}} = L_I(r)\, L_J(s), \quad I, J = 1,2,3,4 \tag{3.8}$$

dove

$$\begin{aligned} L_1(r) &= \frac{1}{16}(r-1)(1-9r^2) \\ L_2(r) &= \frac{9}{16}(1-r^2)(1-3r) \\ L_3(r) &= \frac{9}{16}(1-r^2)(1+3r) \\ L_4(r) &= \frac{1}{16}(1+r)(9r^2-1) \end{aligned} \tag{3.9}$$

La posizione dei punti dell'elemento L16 è mostrato in Fig. 3.1b.
Come già anticipato, i modelli LE, che sfruttano i polinomi di Lagrange per descrivere il campo di spostamenti della sezione trasversale della trave, sono stati introdotti per far fronte ad alcune limitazioni presenti nei modelli TE. La scelta di




(a) Elemento a nove punti, L9. (b) Elemento a sedici nodi, L16.

Figura 3.1. Elementi della sezione trasversale nel piano fisico.

utilizzare un espansione di Lagrange come funzioni approssimanti ci porta ad avere solo variabili di spostamento. Questo aspetto è di particolare interesse poichè:

1. ogni variabile ha un preciso significato fisico (le incognite del problema sono solo spostamenti traslazionali);

2. le variabili incognite possono essere posizionate in zone di particolare interesse (sottodomini) della sezione trasversale (ad esempio in prossimità dei carichi);

3. le condizioni al contorno geometriche possono essere applicate in sottodomini della sezione trasversale della struttura (e non solo all'intera sezione);

4. le condizioni al contorno geometriche possono essere applicate anche lungo l'asse longitudinale della trave;

5. le sezioni trasversali possono essere divise in più sezioni di trave e facilmente assemblate, dal momento che gli spostamenti sul contorno di ogni sezione sono usati come incognite del problema. Da qui il termine *component-wise*;

6. l'estensione di tale modello a problemi che presentano non - linearità geometriche sembra essere più fruibile che nel caso dei modelli TE di ordine elevato.

Recentemente sono stai utilizzati anche elementi a tre (L3) e a quattro (L4) punti [11, 9], oltre ai già citati polinomi a nove punti (L9), nel contesto della CUF; questi portano ad una approssimazione del campo di spostamenti rispettivamente lineare, quasi - lineare (bilineare), e quadratico.

Modelli più raffinati di trave sono ottenuti introducendo ulteriori discretizzazioni sulla sezione trasversale della struttura in termini di numero di elementi implementati. La Fig. 3.2, ad esempio, mostra l'assemblaggio di due elementi L9 che condividono un lato e tre punti che hanno in comune. In questo caso il modello di trave sarà definito dal numero di elementi posti sulla sezione trasversale.

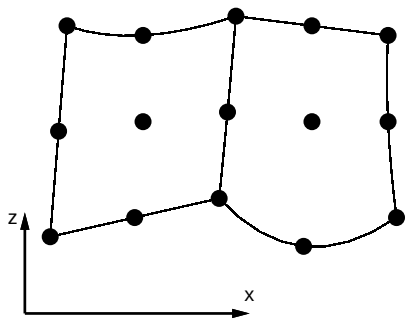



Figura 3.2. Due elementi L9 assemblati.

Per far fronte al tipo di strutture trattate in questo lavoro, è nata inoltre la necessità di implementare nel codice la possibilità di variare, lungo l'asse $y$ della trave, il tipo di elemento LE discretizzante la sezione trasversale, ovvero di variare l'ordine di espansione della teoria stessa. In Fig. 3.3 si riporta ad esempio l'assemblaggio di un elemento L9 con due elementi L4 lungo $y$.

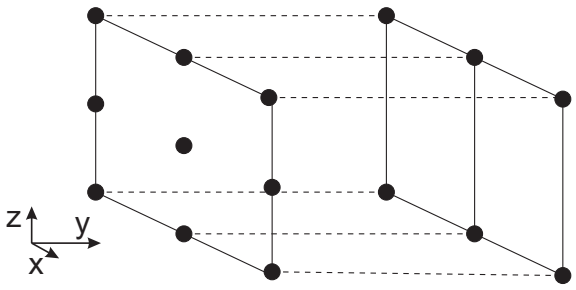



Figura 3.3. Un elemento L9 assemblato con due elementi L4 lungo l'asse della trave.

È bene precisare, infine, che la scelta della discretizzazione della sezione (scelta del tipo, del numero e della distribuzione degli elementi) è del tutto indipendente dalla scelta dell'elemento finito da utilizzare lungo l'asse della trave.

# Capitolo 4

# Formulazione FE

Quanto segue si occupa di descrivere la formulazione dell'elemento finito di tipo gerarchico sotto tre forme differenti. Il loro utilizzo come strumento di calcolo permette di trovare una soluzione approssimata per geometrie arbitrarie di trave e qualsivoglia condizione di carico e di vincolo. È bene sottolineare che il metodo agli elementi finiti (FEM) rappresenta appena una delle possibili tecniche di analisi che possono essere implementate nei modelli CUF. Altri metodi possono essere adottati, come mostrato in un recente lavoro di Carrera e Giunta [6], dove sono presentate soluzioni analitiche in forma chiusa.
Secondo la metodologia FEM di base, lo spostamento $\mathbf{u}_\tau$ di un punto qualsiasi nel dominio dell'elemento è il risultato della combinazione lineare dei gradi di libertà nodali $\mathbf{q}_{\tau i}$, pesati tramite i valori delle funzioni di forma $N_i$ valutate alla coordinata $y$ del punto prescelto. Il tutto è riassunto dalla seguente formula, scritta nella forma di Einstein:

$$\mathbf{u}_\tau(y;t) = N_i(y)\mathbf{q}_{\tau i}(t) \qquad i = 1, ..., N \tag{4.1}$$

dove $N$ si riferisce al numero di nodi totale dell'elemento. Il vettore degli spostamenti nodali è così definito:

$$\mathbf{q}_{\tau i} = \left\{ \begin{array}{ccc} q_{u_{x_{\tau i}}} & q_{u_{y_{\tau i}}} & q_{u_{z_{\tau i}}} \end{array} \right\}^T \tag{4.2}$$

Sostituendo l'Eq. 4.1 nell'Eq. 3.1, riprendendo cioè la CUF e combinandovi la metodologia FEM, otteniamo:

$$\mathbf{u}(x, y, z; t) = F_\tau(x, z)N_i(y)\mathbf{q}_{\tau i}(t) \tag{4.3}$$

dove $i$ e $\tau$ sono indice delle due espansioni di ordine $N$ e $M$ rispettivamente. In particolare si ricorda che $M$ rappresenta il parametro libero del modello di trave adottato e, indicando il numero dei termini dell'espansione della teoria adottata, ne determina l'ordine.
Poichè le funzioni approssimanti la sezione trasversale della trave $F_\tau$ non dipendono

dalla coordinata $y$, in accordo con l'Eq. 2.5 le deformazioni posso essere scritte come:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_n &= (\boldsymbol{D}_{np} F_\tau \mathbf{I}) N_i \mathbf{q}_{\tau i} + F_\tau (\boldsymbol{D}_{ny} N_i \mathbf{I}) \mathbf{q}_{\tau i} \\ \boldsymbol{\epsilon}_p &= (\boldsymbol{D}_p F_\tau \mathbf{I}) N_i \mathbf{q}_{\tau i} \end{aligned} \tag{4.4}$$

dove $\mathbf{I}$ è una matrice identità di dimensioni $3 \times 3$.
Come detto, sono tre gli elementi finiti formulati, ossia a due, tre e quattro nodi. Ovviamente elementi finiti con numero differente di nodi richiedono diverse funzioni di forma, la cui scelta è compiuta in conformità con la definizione del metodo di calcolo stesso. Ricordandola, il valore della $i$-esima funzione di forma deve assumere valore unitario in corrispondenza dell'$i$-esimo nodo e valore nullo sugli altri nodi. Per le espressioni esplicite di tali funzioni di forma si veda l'Appendice A. In questo lavoro si farà un largo uso di elementi a quattro nodi, da quì in avanti indicati come B4, adottando in questo modo un'approssimazione cubica lungo l'asse $y$.

## 4.1 Matrice di Rigidezza

La variazione virtuale del lavoro di deformazione ($\delta L_{int}$) è considerata come somma di due contributi, in accordo con l'Eq. 2.3 in cui si sono raggruppate le componenti di tensione e deformazione. La matrice di rigidezza degli elementi si ottiene per mezzo del *Principio dei Lavori Virtuali* (PLV):

$$\delta L_{int} = \int_V (\delta \boldsymbol{\epsilon}_p^T \boldsymbol{\sigma}_p + \delta \boldsymbol{\epsilon}_n^T \boldsymbol{\sigma}_n) dV = \delta L_{ext} + \delta L_{ine} \tag{4.5}$$

dove $\delta L_{ext}$ rappresenta la variazione virtuale del lavoro delle forze esterne, mentre $\delta L_{ine}$ la variazione virtuale del lavoro delle forze di inerzia.
Sostituendo nell'Eq. 4.5 le equazioni costitutive del materiale, Eq. 2.7, e le relazioni deformazioni - spostamenti nodali, Eq. 4.4, i due temini all'interno della variazione virtuale del lavoro interno diventano:

$$\begin{aligned} \delta L_{int} = \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \int_l \int_\Omega \{ [N_i \, (\boldsymbol{D}_{np}^T F_\tau \mathbf{I}) + (\boldsymbol{D}_{ny}^T N_i \mathbf{I}) \, F_\tau] \, [\tilde{\boldsymbol{C}}_{np} \, (\boldsymbol{D}_p F_s \mathbf{I}) \, N_j + \\ + \tilde{\boldsymbol{C}}_{nn} \, (\boldsymbol{D}_{np} F_s \mathbf{I}) \, N_j + \tilde{\boldsymbol{C}}_{nn} F_s \, (\boldsymbol{D}_{ny} N_j \mathbf{I})] + \\ + N_i \, (\boldsymbol{D}_p^T F_\tau \mathbf{I}) \, [\tilde{\boldsymbol{C}}_{pp} (\boldsymbol{D}_p F_s \mathbf{I}) \, N_j + \tilde{\boldsymbol{C}}_{pn} \, (\boldsymbol{D}_{np} F_s \mathbf{I}) \, N_j + \\ + \tilde{\boldsymbol{C}}_{pn} F_s \, (\boldsymbol{D}_{ny} N_j \mathbf{I})] \} \, d\Omega \, dy \, \mathbf{q}_{sj} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Introduciamo la matrice di rigidezza dell'elemento finito nella seguente espressione:

$$\delta L_{int} = \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \, \boldsymbol{K}^{ij\tau s} \, \mathbf{q}_{sj} \tag{4.7}$$

Separando i singoli termini che compongono l'Eq. 4.6 e ricordando l'indipendenza delle funzioni di forma da $x$ e $z$, possiamo scrivere la matrice di rigidezza, date le proprietà del materiale, in una forma compatta:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}^{ij\tau s} \;=\; & I_l^{ij} \triangleleft \left(\boldsymbol{D}_{np}^T F_\tau \boldsymbol{I}\right)\left[\tilde{\boldsymbol{C}}_{np}\left(\boldsymbol{D}_p F_s \boldsymbol{I}\right) + \tilde{\boldsymbol{C}}_{nn}\left(\boldsymbol{D}_{np} F_s \boldsymbol{I}\right)\right] + \\
& \left(\boldsymbol{D}_p^T F_\tau \boldsymbol{I}\right)\left[\tilde{\boldsymbol{C}}_{pp}\left(\boldsymbol{D}_p F_s \boldsymbol{I}\right) + \tilde{\boldsymbol{C}}_{pn}\left(\boldsymbol{D}_{np} F_s \boldsymbol{I}\right)\right] \triangleright_\Omega + \\
& I_l^{ij,y} \triangleleft \left[\left(\boldsymbol{D}_{np}^T F_\tau \boldsymbol{I}\right)\tilde{\boldsymbol{C}}_{nn} + \left(\boldsymbol{D}_p^T F_\tau \boldsymbol{I}\right)\tilde{\boldsymbol{C}}_{pn}\right] F_s \triangleright_\Omega \boldsymbol{I}_{\Omega y} + \\
& I_l^{i,yj} \boldsymbol{I}_{\Omega y} \triangleleft F_\tau \left[\tilde{\boldsymbol{C}}_{np}\left(\boldsymbol{D}_p F_s \boldsymbol{I}\right) + \tilde{\boldsymbol{C}}_{nn}\left(\boldsymbol{D}_{np} F_s \boldsymbol{I}\right)\right] \triangleright_\Omega + \\
& I_l^{i,yj,y} \boldsymbol{I}_{\Omega y} \triangleleft F_\tau \tilde{\boldsymbol{C}}_{nn} F_s \triangleright_\Omega \boldsymbol{I}_{\Omega y}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

dove:

$$\boldsymbol{I}_{\Omega y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \triangleleft \ldots \triangleright_\Omega = \int_\Omega \ldots \, d\Omega \tag{4.9}$$

$$\left(I_l^{ij},\, I_l^{ij,y},\, I_l^{i,yj},\, I_l^{i,yj,y}\right) = \int_l \left(N_i N_j,\, N_i N_{j,y},\, N_{i,y} N_j,\, N_{i,y} N_{j,y}\right) dy \tag{4.10}$$

$\mathbf{K}^{ij\tau s}$ è una matrice di dimensioni $3 \times 3$ e rappresenta il nucleo fondamentale della matrice di rigidezza; le sue componenti sono riportate in Appendice B. Definita l'espessione formale del nucleo fondamentale, va sottolineato che:

1. $\mathbf{K}^{ij\tau s}$ non dipende dall'ordine di espansione della teoria;
2. $\mathbf{K}^{ij\tau s}$ non dipende dalla scelta dall'espansione polinomiale $F_\tau$. Questo vuol dire che sia i modelli TE che i modelli LE sono ottenuti a partire dallo stesso nucleo fondamentale.

Questi sono i punti chiave della CUF che permettono, con sole nove dichiarazioni FORTRAN, di implementare teorie di classe multipla di qualsiasi ordine. Una più dettagliata trattazione della CUF può essere trovata in [9, 7].

## 4.2 Matrice delle Masse

Le forze di inerzia assumono un ruolo fondamentale nel momento in cui si effettua l'analisi modale di una struttura. La variazione virtuale del lavoro delle forze inerziali può essere scritta nel seguente modo:

$$\delta L_{ine} = -\int_V \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dV \tag{4.11}$$

dove $\rho$ è la massa volumica del materiale, e $\ddot{\mathbf{u}}$ il vettore delle accelerazioni. Sostituendo l'approssimazione del campo di spostamenti bidimensionale, Eq. 3.1, e l'espansione dell'elemento finito, Eq. 4.1, l'espressione di sopra diventa:

$$\delta L_{ine} = -\delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \int_l N_i N_j dy \int_\Omega \rho F_\tau F_s d\Omega \ddot{\mathbf{q}}_{sj} = -\delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \mathbf{M}^{ij\tau s} \ddot{\mathbf{q}}_{sj} \tag{4.12}$$

in cui $\ddot{\mathbf{q}}$ è il vettore delle accelerazioni nodali, e $\mathbf{M}^{ij\tau s}$ rappresenta il nucleo fondamentale della matrice delle masse dell'elemento finito. Le sue componenti sono meglio specificate in Appendice B. Ancora una volta va notato che non è stata fatta alcuna assunzione sull'ordine di espansione. Ecco il motivo per cui è possibile ottenere diversi modelli rifiniti di trave senza cambiare la forma delle componenti dei nuclei fondamentali.

## 4.3 Vettore dei Carichi Nodali

Sia $\mathbf{P}$ il vettore contenente le componenti della generica forza esterna concentrata applicata sull'elemento:

$$\mathbf{P} = \left\{ \begin{array}{ccc} P_{u_x} & P_{u_y} & P_{u_z} \end{array} \right\}^T \tag{4.13}$$

L'espressione della variazione del lavoro delle forze esterne relativo ad un sistema di spostamenti virtuali è la seguente:

$$\delta L_{ext} = \mathbf{P} \delta \mathbf{u}^T \tag{4.14}$$

Sostituendo l'Eq. 4.3 nell'Eq. 4.14, otteniamo:

$$\delta L_{ext} = F_\tau N_i \mathbf{P} \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \tag{4.15}$$

Quest'ultima espressione ci permette di identificare le componenti del nucleo che portano all'assemblaggio del vero e proprio vettore dei carichi nodali, identificando le variabili di spostamento soggette a carico:

$$\delta L_{ext} = \mathbf{F}_{\tau i} \delta \mathbf{q}_{\tau i}^T \tag{4.16}$$

dove $\mathbf{F}_{\tau i}$ ha dimensioni $3 \times 1$.
Nel caso di una espansione relativa ad un elemento L9 e di un carico $\mathbf{P}$ che agisce lungo la sola direzione $x$, la variazione virtuale del lavoro esterno è:

$$\begin{gathered} \delta L_{ext} = P_{u_x}\ F_1(x_p, z_p)\ \delta u_{x_1} + P_{u_x}\ F_2(x_p, z_p)\ \delta u_{x_2} + P_{u_x}\ F_3(x_p, z_p) \delta u_{x_3} + \\ + P_{u_x}\ F_4(x_p, z_p)\ \delta u_{x_4} + P_{u_x}\ F_5(x_p, z_p)\ \delta u_{x_5} + \\ + P_{u_x}\ F_6(x_p, z_p)\ \delta u_{x_6} + P_{u_x}\ F_7(x_p, z_p)\ \delta u_{x_7} + P_{u_x}\ F_8(x_p, z_p)\ \delta u_{x_8} + \\ + P_{u_x}\ F_9(x_p, z_p)\ \delta u_{x_9} \end{gathered} \tag{4.17}$$

dove $[x_p,\ z_p]$ è il punto di applicazione del carico sulla sezione trasversale della sezione.
In generale una struttura è soggetta a forze applicate per unità di superficie e per unità di volume. In ogni caso, è possibile passare dalla distribuzione qualsiasi dei carichi sul corpo ad un sistema di forze concentrate applicate ai nodi. Implementando il metodo agli elementi finiti nella formulazione unificata si trova sempre una equazione analoga all'Eq. 4.16.

## 4.4 Equazioni di Equilibrio

Sostituendo le Eq. 4.7, 4.16 e 4.12 nel Principio dei Lavori Virtuali, Eq. 4.5, ricaviamo il sistema di equazioni di equilibrio del nostro problema strutturale sotto forma di una relazione tra matrici:

$$\mathbf{M}^{ij\tau s}\ddot{\mathbf{q}}_{\tau i} + \mathbf{K}^{ij\tau s}\mathbf{q}_{\tau i} = \mathbf{F}_{\tau i} \tag{4.18}$$

dove il significato dei simboli è quello precisato nel precedente sviluppo.
Le equazioni di equilibrio relativi all'intera struttura si ricavano assemblando i nuclei sopra definiti, seguendo la procedura classica descritta nel metodo agli elementi finiti [1] e adottando uno degli approcci descritti nel Paragrafo 4.5 (ESL, LW) per le strutture laminate. In particolare, per la matrice di rigidezza, si procede come segue:

1. si sfrutta il nucleo fondamentale per calcolare la matrice di rigidezza di ogni elemento discretizzante la sezione trasversale di un nodo strutturale. Se si considera un elemento L9, questa matrice avrà $27 \times 27$ termini;

2. la matrice di rigidezza del nodo strutturale viene quindi assemblata considerando tutti gli elementi sulla sezione;

3. si calcola la matrice di rigidezza di ogni elemento di trave e si assembla la matrice di rigidezza globale.

Il sistema algebrico finale, nel caso di analisi statica, le cui incognite sono proprio i gradi di libertà nodali $\mathbf{q}$, è:

$$\mathbf{K}\ \mathbf{q} = \mathbf{F} \tag{4.19}$$

dove $\mathbf{K}$ rappresenta la matrice assemblata di rigidezza strutturale, mentre il secondo componente del sistema, posto alla destra dell'uguale, è il termine noto dei carichi nodali equivalenti.
Infine, è da sottolineare che fino a questo punto la matrice di rigidezza $\mathbf{K}$, il termine noto $\mathbf{F}$ e il vettore delle incognite $\mathbf{q}$ sono ancora scritti nel sistema di riferimento locale dell'elemento. Questo significa che la procedura non è ancora improntata alla

descrizione di segmenti di trave comunque orientati nello spazio, ma solo allineati lungo una stessa direzione. Per motivi di brevità si omette tale generalizzazione.
Nel caso di analisi modale, abbiamo visto che il problema dinamico non smorzato può essere scritto come:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \tag{4.20}$$

Introducendo soluzioni armoniche, è possibile calcolare le frequenze naturali, $\omega_k$, per il caso omogeneo, risolvendo il seguente problema agli autovalori:

$$(-\omega_k^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{q}_k = 0 \tag{4.21}$$

dove $\mathbf{q}_k$ è il *k-esimo* autovettore e rappresenta il modo di vibrare relativo alla frequenza naturale $\omega_k$.

## 4.5 FEM Applicato a Espansioni TE e LE di Strutture Laminate

Essendo considerate in campo aerospaziale, generalmente, strutture composite non omogenee, possono essere adottati due approcci di modellizzazione:

1. l'approccio *Equivalent Single Layer*, d'ora in poi denominato con la sigla ESL;
2. l'approccio *Layer Wise*, indicato come LW.

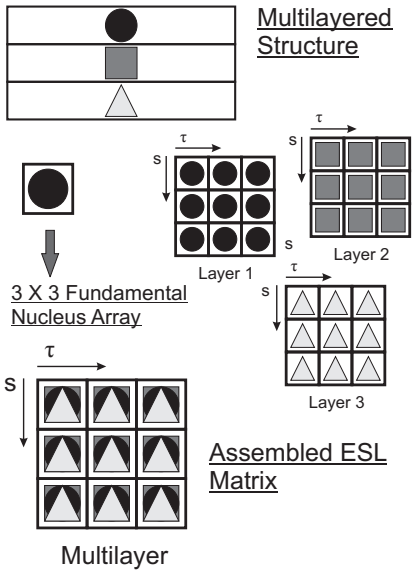



Figura 4.1. Schema di assemblaggio ESL.

In un modello ESL, si adotta una omogenizzazione delle proprietà di ogni singolo strato componente la strutture sommando i contributi di ogni strato nella matrice di rigidezza. Questo processo porta ad un modello che presenta una serie di variabili attribuita all'intero multistrato. La procedura di assemblaggio ESL della matrice di rigidezza nell'ambito della CUF è graficamente mostrata in Fig. 4.1.
Sia modelli che si basano su espansioni TE che LE possono essere implementati con l'approccio ESL.
Diversamente, LW considera una differente serie di variabili per ogni singolo strato, e l'omogenizzazione è condotta solo all'interfaccia tra stato e strato. La procedura di assemblaggio LW è presentata in Fig. 4.2. I modelli LE ottengono una descrizione

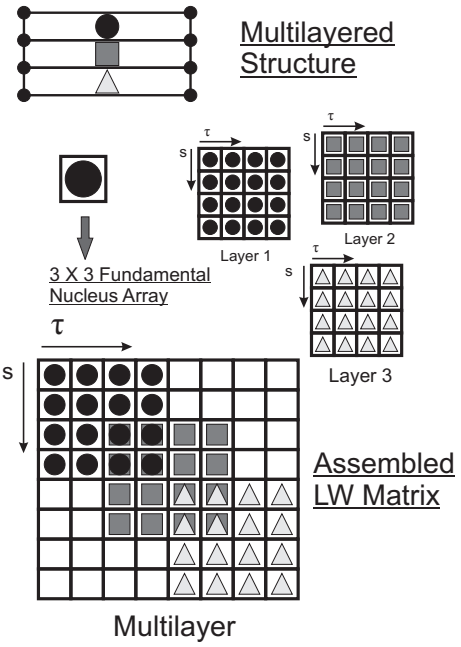



Figura 4.2. Schema di assemblaggio LW.

LW della struttura direttamente considerando differenti set di *L-elements* (L9, L16) sulla sezione trasversale di ogni singolo strato. L'omogenizzazione è quindi condotta in corrispondenza dei nodi della sezione condivisi all'interfaccia degli strati. Nei risultati proposti nei capitoli successivi l'approccio LW è adottato solo per analisi basate su modelli LE. Va però chiarito che potremmo usare anche espansioni TE per ottenere un modello LW. In tal caso, per risolvere il problema strutturale, dovremmo aggiungere delle equazioni per imporre condizioni all'interfaccia.

# Capitolo 5

# Strutture a Guscio Rinforzato

Tale capitolo svolge la funzione di panoramica sui risultati ottenuti dall'implementazione della formulazione strutturale. Infatti prima di poter giudicare un risultato aeroelastico, è necessario valutare se lo strumento strutturale sia stato formulato e programmato nel modo adeguato. In particolare andremo a valutare la validità dei nostri modelli per strutture a guscio rinforzato.
È importante sottolineare che l'utilizzo dei codici commerciali agli elementi finiti per tale tipoligia di strutture non è sempre conveniente. Per ottenere risultati prossimi alla realtà fisica, dovremmo fare ampio uso di elementi solidi. Dato lo spessore delle pareti costituenti le sezioni delle travi considerate nello studio che segue, gli elementi finiti sopra citati avrebbero dimensioni molto piccole rispetto l'estensione assiale della trave. Ciò renderebbe necessario l'utilizzo di un numero di elementi, e quindi di gradi di libertà, smisurato, con un conseguente aumento dei tempi di calcolo.
Modelli basati sul *Semiguscio ideale* verranno utilizzati come termine di paragone. Questi modelli sono molto diffusi per l'analisi preliminare di strutture aerospaziali per via della loro semplicità, ma vedremo che, data l' estrema schematizzazione che comportano alla struttura stessa, commettono errori a volte inaccettabili.

## 5.1 Il Semiguscio Ideale

Lo schema strutturale noto come *Semiguscio ideale* prevede una radicale modifica della struttura a guscio rinforzato, al fine di semplificarne il calcolo analitico. Si pensi ad esempio al tratto di rivestimento alare in corrispondenza di un longherone mostrato in Fig. 5.1. Secondo il nostro modello semplificativo le solette vengono sostituite da *correnti*, aree concentrate destinate ad assorbire flessione mediante generazione di sforzi normali, mentre i *pannelli*, che contrastano le forze di taglio trasvese, prendono il posto di anime e rivestimenti.
Il tipico stato di sollecitazione di una struttura a semiguscio è riassunto in Fig. 5.2,

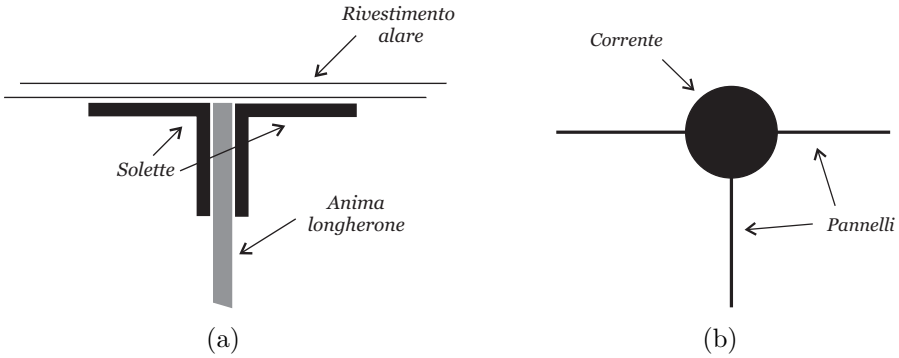



Figura 5.1. Particolare di una struttura a guscio rinforzato (a) e relativo schema a semiguscio ideale (b).

dove $P$ sono le forze agenti sui correnti in prossimità dell'incastro, mentre $q$ i flussi di taglio nei pannelli, definiti come l'integrale sullo spessore dello sforzo di taglio:

$$q = \int_s \tau \, ds \tag{5.1}$$

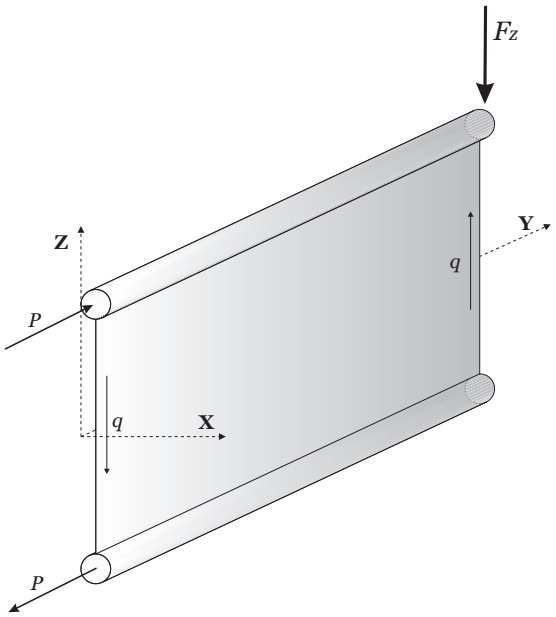



Figura 5.2. Stato di sollecitazione di una struttura a due correnti ed un pannello.

Gli irrigidimenti trasversali, centine e ordinate, hanno il compito, principalmente, di preservare la forma della struttura e delimitano il cosiddetto *cassone alare*. Esso coincide, per l'appunto, con la porzione della struttura compresa tra due centine (o

ordinate) ed ha il compito di trasferire i carichi applicati nel piano in cui giace, agli altri elementi che costituiscono la struttura a semiguscio. Un esempio di cassone è mostrato in Fig. 5.3.

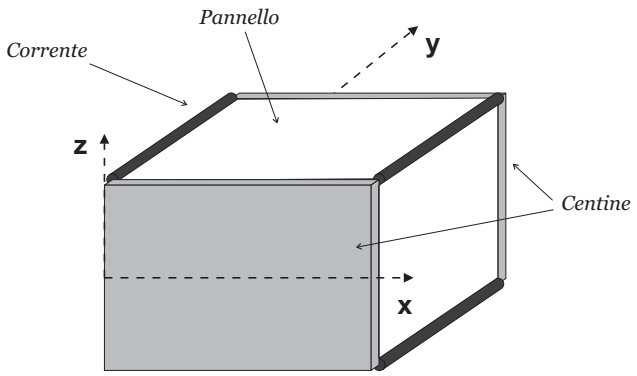



Figura 5.3. Esempio di cassone alare e sistema di riferimento cartesiano.

L'insieme di più cassoni è detto *tronco*.
Il modello del semiguscio ideale trova le radici della sua fama nella capacità di fornire, con pochi calcoli, una descrizione dello stato di sollecitazione della struttura. Lo schema descritto, però, non potrà essere utilizzato per determinare stati di sollecitazione complessi. Limiti ancora più grandi si riscontrano nel caso in cui si applichi lo schema della *trave a semiguscio*, in cui al modello del semiguscio si aggiungono le semplificazioni descritte nella teoria delle travi.
Ecco il motivo per cui questi modelli verranno utilizzati in questo contesto solo come termine di paragone nella discussione dei modelli basati sulla teoria unificata della trave.

## 5.2 Il Semiguscio Puro

In questo lavoro, per motivi di necessità, si utilizzano termini non usuali nella letteratura tecnica aerospaziale, quali *semiguscio puro* e *trave a semiguscio*, introdotte nel lavoro del Professor Carrera [2] cui questo capitolo prende ispirazione.
Consideriamo un cassone e il suo sistema di riferimento, quale ad esempio quello di Fig. 5.3. Questo viene caricato sulla centina posteriore da forze che agiscono nel piano della centina stessa, e da forze trasversali al piano, applicate in corrispondenza dei correnti. Per ciò che riguarda le forze nel piano, queste possono essere ridotte ad un sistema risultante di forze lungo $x$ e $z$ e momento torcente attorno a $y$.
Sulla centina anteriore, incastrata, si misureranno le incognite, costituite dagli sforzi normali nei correnti e dai flussi di taglio nei pannelli. Risulta chiaro, quindi, che il numero delle incognite è pari alla somma del numero dei correnti e dei pannelli.

Per poter determinare queste sollecitazioni si dovranno scrivere un numero pari di equazioni. Queste potranno essere di due tipi:

1. equazioni di equilibrio, di tipo esterno ed interno;
2. equazioni di congruenza.

Le equazioni di equilibrio esterne sono date dalle sei equazioni cardinali della statica tra sollecitazioni incognite e carichi applicati: tre equazioni di equilibrio alla traslazione e tre equazioni di equilibrio alla rotazione attorno ai tre assi ortogonali introdotti.

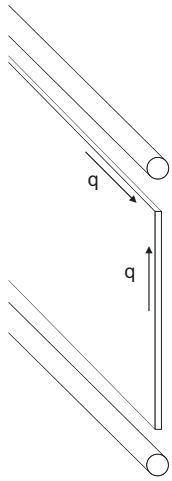



Figura 5.4. Flussi agenti sui pannelli equilibranti la variazione di sforzo assiale nel corrente.

Fra le possibili equazioni interne, assumono estremo interesse le equazioni al corrente. Queste sono ottenute scrivendo l'equilibrio alla traslazione lungo $y$. L'equilibrio dei correnti in direzione assiale (stiamo considerando il caso di sollecitazione pura di taglio senza momento flettente), si scrive come l'equilibrio fra la variazione di azione assiale nel corrente stesso e i flussi agenti sui pannelli che, per simmetria del tensore degli sforzi, risultano essere uguali ai flussi agenti sui correnti (Fig. 5.4).
Una struttura è definita isostatica quando le sole equazioni di equilibrio sono sufficienti a determinare le incognite del problema. Indicando con $N_c$ il numero dei correnti, si dimostra [2] che di queste $N_c + 6$ equazioni di equilibrio solo $N_c + 3$ sono linearmente indipendenti. Quindi, indicando con $G_I$ il grado di iperstaticità della struttura e con $N_p$ il numero dei pannelli, possiamo scrivere:

$$G_I = Np - 3 \tag{5.2}$$

Tale regola presenta delle eccezioni che verranno descritte nel seguito.

## 5.3 La Trave a Semiguscio

Spesso la risoluzione di strutture a semiguscio prevede l'introduzione di alcune semplificazioni sotto forma di legami tra le grandezze in gioco, che si aggiungono alle equazioni di equilibrio e di congruenza.
Nel caso in cui la risoluzione del problema sia accompagnata dall'applicazione della teoria delle travi di Eulero-Bernoulli, il metodo prende il nome di *trave a semiguscio* e l'equazione semplificativa di comportamento è la nota formula di Navier, che scritta in un sistema di riferimento centrale assume la forma:

$$\sigma_i = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} x_i - \frac{M_z}{I_z} z_i \tag{5.3}$$

in cui $\sigma_i$ indica la tensione normale nel generico corrente; $A$, $I_x$ e $I_z$ sono rispettivamente l'area complessiva della senzione e i suoi momenti di inerzia; $N$, $M_x$ e $M_z$ indicano le caratteristiche di sollecitazione.
L'utilizzo dell'equazione di Navier risulta un grande vantaggio, però costringe le tensioni normali nei correnti ad obbedire ad una distribuzione piana, inoltre esclude la possibilità che nei correnti si generino tensioni normali per effetto di torsione.
Ancora una volta è possibile calcolare il grado di iperstaticità della struttura, riassunto dall'equazione seguente.

$$G_I = N_p - N_c \tag{5.4}$$

## 5.4 Cassone a Due Correnti e Un Pannello

Sebbene si tratti della struttura a semiguscio più semplice che si possa immaginare, riveste una notevole importanza nelle strutture aerospaziali, in quanto potrebbe essere utilizzata per rappresentare un tipico longherone alare.
Il cassone, incastrato ad una centina e libero all'altra, oggetto dello studio che segue, presenta la struttura (non scalata) mostrata in Fig. 5.5. La Tabella 5.1 ne riporta le dimensioni geometriche.

| | Dimensione [m] |
|---|---|
| $a$ | 0.03 |
| $h$ | 1 |
| $s$ | 0.001 |
| $L$ | 3 |

Tabella 5.1. Dimensioni geometriche della struttura a due correnti e un pannello.

Un carico concentrato, $F_z$, di intensità $-1$ [N], è applicato nel punto medio della

sezione all'estremità in $[\frac{a}{2},\ L,\ 0]$. L'intera trave è costituita da materiale isotropo avente le seguenti proprietà: modulo di elasticità $E = 75 \times 10^9$ [Pa]; coefficiente di Poisson $\nu = 0.33$.

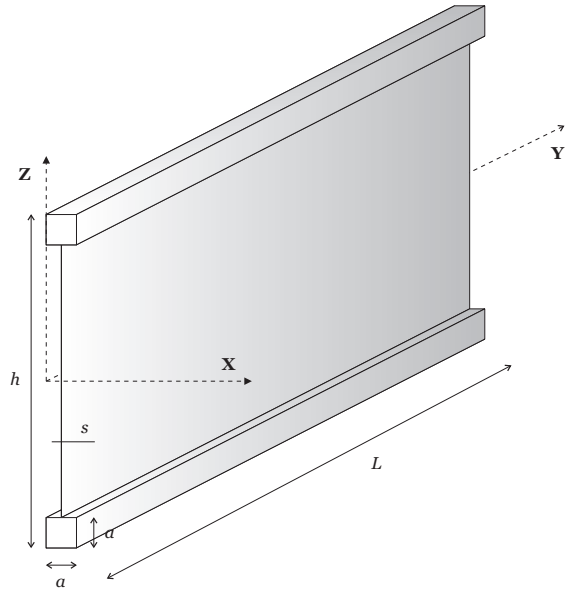



Figura 5.5. Trave a due correnti e un pannello.

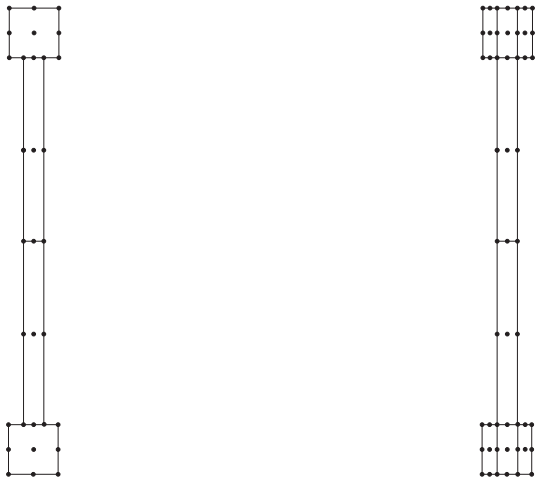
Per i modelli basati su espansione LE, sulla sezione trasversale si adottano due diverse distribuzioni di elementi L9, come mostrato in Fig. 5.6. La scelta di queste due diverse discretizzazioni serve per valutare il diverso assemblaggio della matrice di rigidezza. Infatti considerando soli 4 elementi L9, l'assemblaggio tra due elementi adiacenti all'interfaccia corrente - parete avviene su un solo punto, anzichè su tre, come nel caso 8 L9.
Per prima cosa viene valutato lo spostamento verticale, $u_z$, del punto caricato. Per confronto si usa la teoria di Eulero - Bernoulli, secondo cui il contributo dovuto alla flessione è:

$$u_{z_f} = \frac{F_z L^3}{3EI} = u_z^{TS} \tag{5.5}$$

a cui può aggiungersi il termine che tiene conto del taglio, di notevole importanza per travi tozze:

$$u_{z_f} + u_{z_t} = \frac{F_z L^3}{3EI} + \frac{FL}{AG} = u_z^{SP} \tag{5.6}$$

$I$ rappresenta il momento di inerzia della sezione.
La Tabella 5.2 mostra i valori di spostamento e il numero di gradi di libertà per differenti modelli di trave. Questi, così come nei successivi casi analizzati in questo capitolo, sono tutti relativi a una discretizzazione FE lungo l'asse $y$ effettuata con



(a)
4 L9

(b)
8 L9

Figura 5.6. Distribuzione degli elementi L9 sulla sezione a due correnti e un pannello.

| | $u_z \times 10^7$ [m] | DOFs |
|---|---|---|
| | Modelli Analitici | |
| TS | $-2.671$ | - |
| SP | $-3.059$ | - |
| | Modelli Classici | |
| EBBM | $-1.827$ | 279 |
| TBM | $-2.117$ | 279 |
| | Taylor | |
| $N = 3$ | $-2.514$ | 930 |
| $N = 5$ | $-2.629$ | 1953 |
| $N = 7$ | $-2.738$ | 3348 |
| $N = 9$ | $-2.890$ | 5115 |
| | Lagrange | |
| 4 L9, Fig. 5.6a | $-3.639$ | 2883 |
| 8 L9, Fig. 5.6b | $-3.639$ | 4743 |

Tabella 5.2. $u_z$ del punto caricato. Cassone a due correnti e un pannello.

10 elementi B4. Per un analisi più dettagliata degli effetti sul tipo e sul numero di elementi discretizzanti la trave lungo la sua estensione assiale si rimanda a lavori precedenti [11, 9]. Anche le teorie classiche, EBBM e TBM, vengono prese in considerazione.
Per una migliore analisi del caso in esame, andiamo a considerare lo stato di sollecitazione della struttura.

In quanto segue le soluzione *semiguscio puro* e *trave a semiguscio* verranno indicate rispettivamente con le sigle SP e TS. Per entrambi i modelli, il cassone in esame presenta due labilità: esistono una direzione (la $x$) e due rotazioni (assi $z$ e $y$) secondo le quali non è possibile applicare alcun carico o momento. Infatti eventuali azioni agenti secondo queste direzioni/rotazioni non potranno in alcun modo essere equilibrate dalla struttura.
In questo caso particolare le soluzioni SP e TS coincidono. Questo accade in genere per strutture isostatiche.
In Tabella 5.3 si riportano il valore della forza, $P$, che si scarica sul corrente superiore all'incastro e il flusso di taglio medio, $q$, sul pannello della sezione posta a $y = \frac{L}{2}$, confrontando i modelli analitici con quelli derivanti dalla CUF.

| | $P$ [N] | $q$ [N/m] |
|---|---|---|
| Modelli Analitici | | |
| TS | 3.192 | −1.064 |
| SP | 3.192 | −1.064 |
| Modelli Classici | | |
| EBBM | 1.993 | −0.274 |
| TBM | 1.993 | −0.274 |
| Taylor | | |
| $N = 3$ | 2.434 | −0.665 |
| $N = 5$ | 2.350 | −0.561 |
| Lagrange | | |
| 4 L9, Fig. 5.6a | 3.171 | −1.034 |
| 8 L9, Fig. 5.6b | 3.167 | −1.035 |

Tabella 5.3. Forza agente sul corrente superiore all'incastro, $P$, e flusso medio $q$ nel pannello. Cassone a due correnti e un pannello.

Come vedremo a breve, i modelli computazionali prevedono, correttamente, un andamento del flusso di taglio $q$ che non risulta costante lungo il pannello. Per questo motivo è stato necessario definire un valore medio per confrontare questi modelli con quelli basati sul *Semiguscio ideale*. Per i modelli CUF (e quelli, utilizzati nel seguito, risolti con NASTRAN©) il flusso $q$ viene calcolato come:

$$q_m = \frac{1}{l} \int_A \tau \, dA \tag{5.7}$$

Dove $A$ rappresenta l'area del pannello considerato e $l$ la lua lunghezza trasversale. Nel caso dei modelli analitici, lo sforzo di taglio è costante, quindi va fuori al segno d'integrale e $q_m$ coincide con $q$ definito nell'Eq. 5.1.
Le figure che seguono mostrano l'andamento delle tensioni assiali, $\sigma_{yy}$, e tangenziali,

$\sigma_{yz}$, lungo l'asse $z$. Le linee orizzontali delimitano la posizione dei due correnti.
Queste figure rendono chiari i limiti dei modelli basati sul *Semiguscio ideale*, che, come intuibile, risulta un ottimo strumento per un analisi preliminare dello stato di sollecitazione interno della struttura, ma necessita, per sua natura, di essere sostituito in seconda analisi da modelli più sofisticati.
Dalla Fig. 5.8 si nota, infatti, che le teorie di ordine unitario colgono in modo del tutto errato l'andamento del taglio, come il modello TBM, che mostra taglio costante sulla sezione. Questa particolarità è dovuta alla presenza di soli termini lineari in $z$ nel campo di spostamenti, come si può osservare dall'Eq. 3.4. In realtà modelli più avanzati mostrano taglio non costante sul pannello.
Inoltre, anche solo basandoci sui modelli classici quale EBBM, le tensioni normali, diagrammate in Fig. 5.7, presentano il classico andamento lineare a farfalla sulla sezione, mostrandoci che anche i pannelli lavorano a flessione. Sebbene che, aumentando il valore di $N$ per le teorie TE, e dai modelli LE si osserva una maggior concentrazione delle tensioni in prossimità dei due correnti.
Infine è bene notare che le due discretizzazioni (4 L9 e 8 L9) adottate per i modelli basati su espansioni tipo Lagrange restituiscono risultati analoghi, portandoci a preferire la soluzione 4 L9 per via del minor numero di gradi di libertà coinvolto nel calcolo.

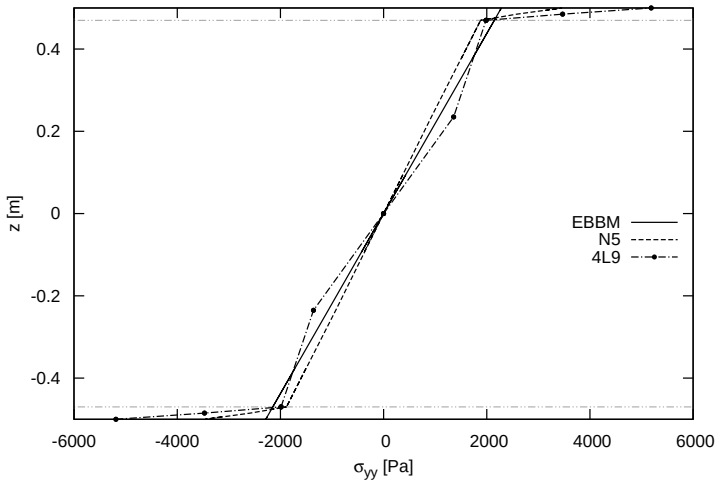



Figura 5.7. Distribuzione lungo $z$ delle tensioni assiali, $\sigma_{yy}$, a $x = \frac{a}{2}$, $y = 0$. Sezione a due correnti e un pannello.

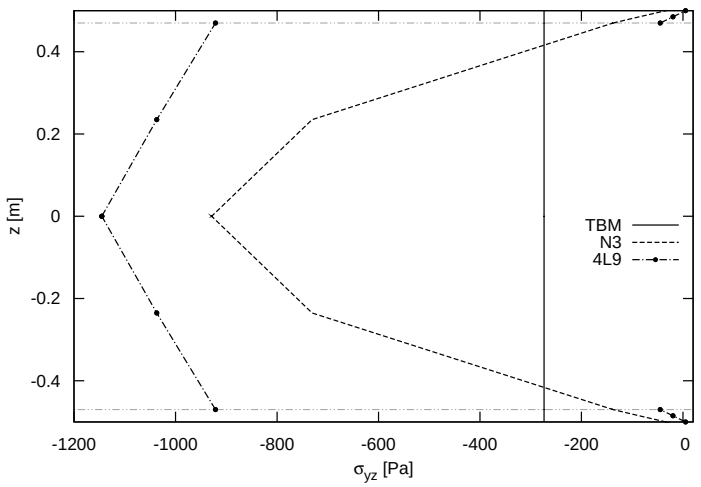



Figura 5.8. Distribuzione lungo $z$ delle tensioni tangenziali, $\sigma_{yz}$, a $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{L}{2}$. Sezione a due correnti e un pannello.

## 5.5 Cassone a Due Pannelli Allineati

Consideriamo la struttura di Fig. 5.9.

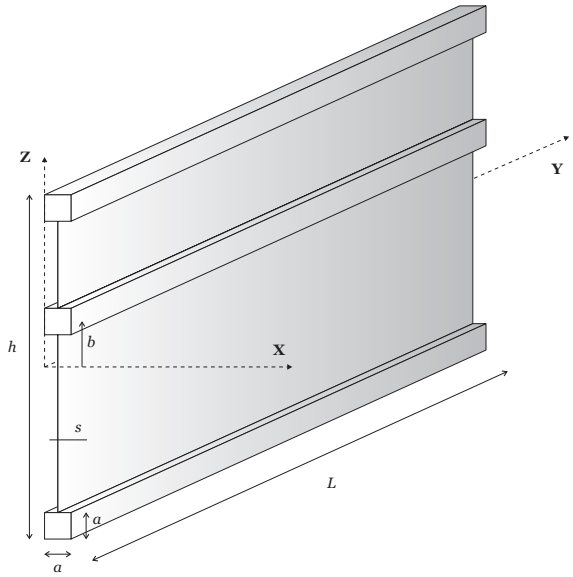



Figura 5.9. Cassone a tre correnti e due pannelli.

Questo cassone si differenzia dal caso precedente per l'aggiunta di un corrente intermedio. Le dimensioni geometriche della trave sono raccolte nella Tabella 5.4.

| | Dimensione [m] |
|---|---|
| $a$ | 0.04 |
| $b$ | 0.18 |
| $h$ | 1 |
| $s$ | 0.002 |
| $L$ | 3 |

Tabella 5.4. Dimensioni geometriche della struttura a tre correnti e due pannelli.

Un carico $F_z = -1$ [N] è applicato nel punto $[\frac{a}{2},\ L,\ \frac{h}{2}]$ sulla centina posteriore, mentre la centina anteriore viene incastrata. Il materiale cui è composto il cassone è lo stesso del caso precedente.
In Tabella 5.5 viene riportata la freccia relativa al corrente intermedio per i vari modelli implementati. Un modello NASTRAN© a elementi solidi (Fig. 5.10) è stato inserito per un confronto. Di questo si nota subito l'elevato numero di gradi di libertà e un valore di spostamento $u_z$ del tutto analogo all'analisi *LE-based*. Quest'ultima è stata implementata discretizzando la sezione con 5 elementi L9: tre per i correnti e due per i pannelli.

| | $u_z \times 10^7$ [m] | DOFs |
|---|---|---|
| SOLID | $-1.857$ | 72450 |
| | Modelli Analitici | |
| TS | $-1.309$ | - |
| SP | $-1.471$ | - |
| | Modelli Classici | |
| EBBM | $-1.325$ | 279 |
| TBM | $-1.487$ | 279 |
| | Taylor | |
| $N = 4$ | $-1.661$ | 1395 |
| $N = 6$ | $-1.707$ | 2604 |
| $N = 8$ | $-1.730$ | 4185 |
| | Lagrange | |
| 5 L9 | $-1.846$ | 3813 |

Tabella 5.5. $u_z$ del corrente intermedio. Cassone a due pannelli allineati.

Per ciò che concerne lo stato di sollecitazione di questa struttura è bene fare luce su alcune questioni di estremo interesse. Nel caso in cui consideriamo la teoria del *semiguscio puro*, il grado di iperstaticità vale:

$$G_I^{SP} = N_p - 3 = -1 \tag{5.8}$$

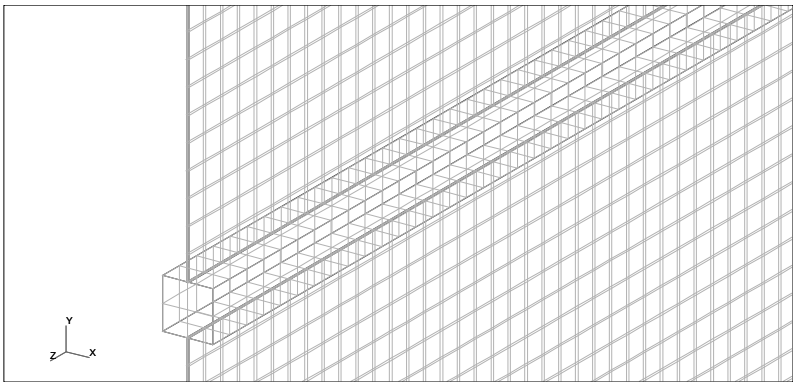



Figura 5.10. Particolare del modello NASTRAN© a elementi solidi. Corrente intermedio.

Due pannelli producono una labilità. In realtà l'iperstaticità della struttura dipenderà dalla configurazione geometrica della stessa. Nel caso in esame, in cui si presentano due pannelli allineati, le incognite sono i due flussi $q_1$ e $q_2$ e le tre forze nei correnti $P_1$, $P_2$ e $P_3$, come mostrato in Fig. 5.11. Le sei equazioni di equilibrio di

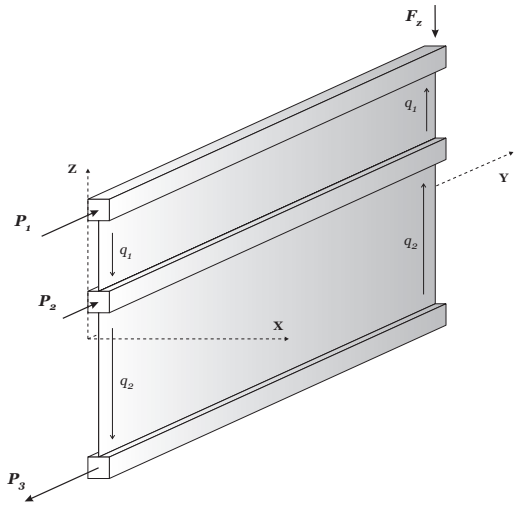



Figura 5.11. Cassone con tre correnti e due pannelli allineati: condizioni di carico sulla centina posteriore e sollecitazioni incognite.

tipo esterno si riducono a tre:

1. l'equilibrio alla traslazione lungo l'asse $y$;
2. l'equilibrio alla traslazione lungo l'asse $z$;
3. l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse $x$.

Le equazioni di tipo interno sono rappresentate dalle tre relazioni ai correnti, delle quali però solo una è linearmente indipendente dalle tre riportate sopra.
Questo *set* di equazioni potrà quindi ridursi ad un sistema di quattro sole relazioni indipendenti: le cinque sollecitazioni incognite non possono essere determinate dalle sole equazioni della statica. La struttura, come anticipato, rappresenta un eccezione e presenta una iperstaticità.
La spiegazione di questo fenomeno è molto semplice ed è da ricercarsi nella presenza di due flussi incogniti, i quali agiscono secondo un unica direzione. Lungo tale direzione, però, è possibile scrivere un unica equazione della statica.
Per il calcolo delle incognite sarà necessario introdurre le proprietà di deformazione dei pannelli e dei correnti tramite il *Principio dei Lavori Virtuali*, oppure utilizzare lo stesso per correggere i difetti di congruenza dati dalla soluzione TS al fine di trovare la soluzione esatta [2].
La soluzione *Trave a semiguscio* descrive la struttura oggetto di tale discussione come avente grado di iperstaticità pari a:

$$G_I^{TS} = N_p - N_c = -1 \tag{5.9}$$

La struttura è dunque labile. L'ipotesi di comportamento della trave, impone che i tre sforzi normali $P_1$, $P_2$ e $P_3$ assumano valori tali da poter essere determinati dall'equazione di Navier (Eq. 5.3).
La soluzione trave non tiene conto quindi dello *shear lag*[1], il quale viene preso correttamente in considerazione solo dalla risoluzione dell'iperstatica: questa mette in evidenza come in realtà i pannelli tendano a sovraccaricare i correnti di estremità rispetto al corrente centrale.

| | $q_1$ [N/m] | $q_2$ [N/m] | $P_1$ [N] | $P_2$ [N] | $P_3$ [N] |
|---|---|---|---|---|---|
| SP | −0.949 | −1.118 | 2.847 | 0.507 | −3.353 |
| TS | −0.859 | −1.095 | 2.574 | 0.730 | −3.285 |
| Errore TS % | −9% | −2% | 9% | −44% | −2% |

Tabella 5.6. Confronto TS e SP. Sezione a due pannelli allineati.

In Tabella 5.6 si confrontano i risultati della soluzione SP e TS per il caso in esame. Si osserva che, mentre le forze sui correnti esterni e i flussi sui pannelli sono valutati in maniera accettabile, la forza normale al corrente centrale è invece prevista con un errore assolutamente intollerabile dalla teoria TS. Tale effetto, naturalmente, è

[1] *Propagazione per taglio.* I carichi concentrati si propagano nella struttura attraverso variazioni di forze nei correnti, che sono a loro volta resi possibili dalla presenza dei pannelli che assorbono tali variazioni, creando sforzi taglianti negli stessi.

tanto meno evidente quanto più è affusolata la trave.
La Tabella 5.7 riassume i risultati ottenuti con vari modelli avanzati mono - dimensionali. In particolare si evidenziano differenze ed analogie tra questi e il modello FEM a elementi solidi analizzato con NASTRAN©.

| | $q_1$ [N/m] | $q_2$ [N/m] | $P_1$ [N] | $P_2$ [N] | $P_3$ [N] |
|---|---|---|---|---|---|
| SOLID | $-0.816$ | $-1.150$ | 2.391 | 0.556 | $-2.706$ |
| | | Modelli Classici | | | |
| EBBM | $-0.305$ | $-0.305$ | 2.323 | 0.733 | $-2.766$ |
| TBM | $-0.305$ | $-0.305$ | 2.323 | 0.733 | $-2.766$ |
| | | Taylor | | | |
| $N = 4$ | $-0.071$ | $-0.902$ | 3.208 | 0.081 | $-3.202$ |
| $N = 6$ | $-0.402$ | $-1.006$ | 2.997 | 0.727 | $-3.251$ |
| $N = 8$ | $-0.469$ | $-1.052$ | 2.916 | 0.639 | $-3.215$ |
| | | Lagrange | | | |
| 5 L9 | $-0.820$ | $-1.150$ | 2.856 | 0.682 | $-3.274$ |

Tabella 5.7. Forze nei correnti all'incastro e flussi medi nei due pannelli a $y = \frac{L}{2}$. Confronto tra il modello NASTRAN© e i modelli CUF. Sezione a tre correnti e due pannelli.

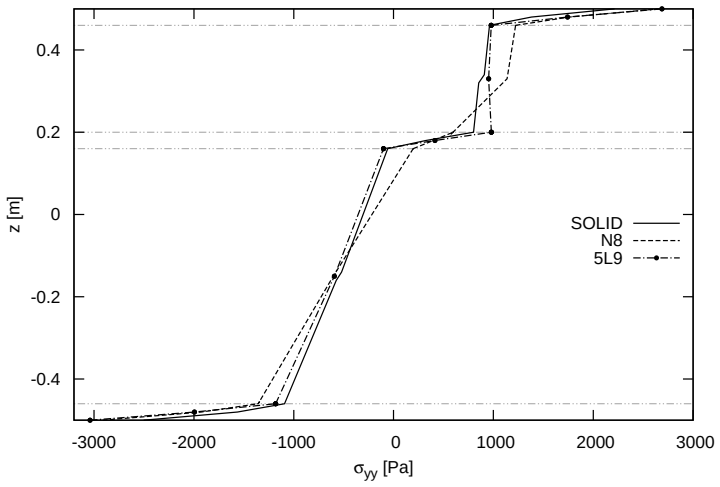



Figura 5.12. Distribuzione lungo $z$ delle tensioni assiali, $\sigma_{yy}$, a $x = \frac{a}{2}$, $y = 0$. Sezione a due pannalli allineati.

Infine le Fig. 5.12 e 5.13 mostrano l'andamento delle tensioni normali e tangenziali

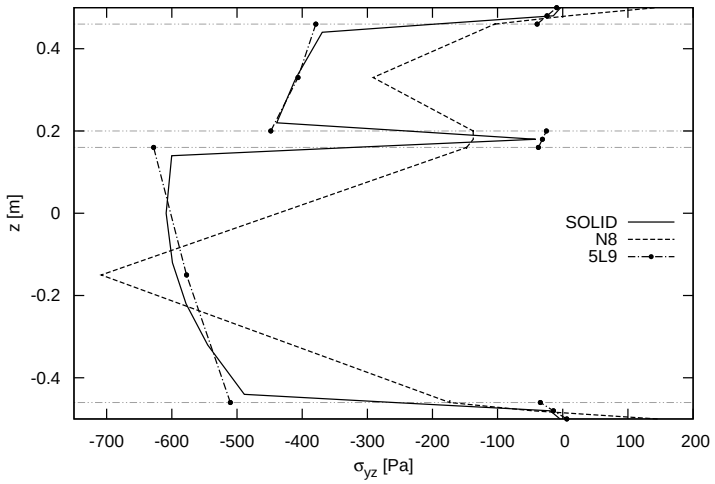



Figura 5.13. Distribuzione lungo $z$ delle tensioni tangenziali, $\sigma_{yz}$, a $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{L}{2}$. Sezione a due pannalli allineati.

lungo l'altezza della struttura. Questa ci permette di apprezzare l'analogia tra il modello NASTRAN© e quelli basati su espansioni polinomiali tipo Lagrange.

## 5.6 Cassone Rettangolare

Si consideri il cassone di Fig. 5.14, con quattro correnti e quattro pannelli incastrato in corrispondenza della sezione anteriore.

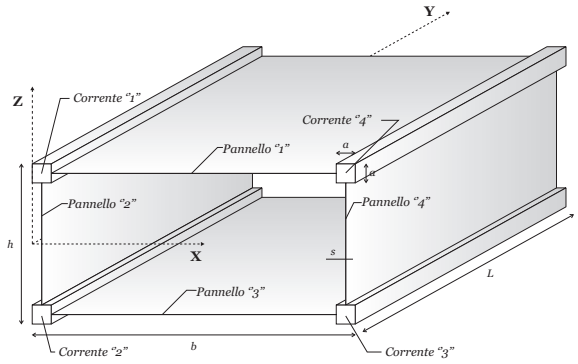



Figura 5.14. Struttura con 4 correnti e 4 pannelli.

La trave, composta dallo stesso materiale isotropo finora considerato, presenta le caratteristiche geometriche riassunte in Tabella 5.8.

| | Dimensione [m] |
|---|---|
| $a$ | 0.04 |
| $b$ | 1 |
| $h$ | 0.5 |
| $s$ | 0.002 |
| $L$ | 3 |

Tabella 5.8. Dimensioni geometriche della struttura rettangolare.

Per analizzare il comportamento della trave a *flesso-torsione*, si applica un carico $F_z = -10$ [N] in corrispondenza del *Corrente* 4 all'estremità libera, precisamente nel punto $[b - \frac{a}{2}, L, \frac{h}{2} - \frac{a}{2}]$.
Un analisi preliminare del comportamento della struttura viene effettuata tramite i modelli analitici basati sul *Semiguscio ideale*. Nelle Tabelle 5.9 e 5.10 si riportano i risultati.

| | $q_1$ [N/m] | $q_2$ [N/m] | $q_3$ [N/m] | $q_4$ [N/m] |
|---|---|---|---|---|
| SP | 5.221 | −5.221 | −5.221 | −16.518 |
| TS | 5.435 | −5.435 | −5.435 | −16.304 |

Tabella 5.9. Flussi medi nei pannelli secondo le teorie analitiche. Sezione rettangolare.

| | $P_1$ [N] | $P_2$ [N] | $P_3$ [N] | $P_4$ [N] |
|---|---|---|---|---|
| SP | 31.325 | −31.325 | −33.893 | 33.893 |
| TS | 32.609 | −32.609 | −32.609 | 32.609 |

Tabella 5.10. Forze nei correnti secondo le teorie analitiche. Sezione rettangolare.

Per motivi di brevità si omettono le equazioni derivanti dalla soluzione trave. In queste non compare la larghezza geometrica del cassone $b$, che viene ignorata. Nelle sollecitazioni compare solo l'altezza $h$, che rappresenta la grandezza geometrica lungo cui si sviluppa la flessione del cassone stesso.
La soluzione TS viene facilmente corretta utilizzando il *Principio dei Lavori Virtuali* [2], il quale porta alla soluzione SP. In realtà, come vedremo a breve, nemmeno questa soluzione risulta accettabile per il caso in esame.
Entrambe le soluzioni analitiche prevedono uno stato di sollecitazione come mostrato in Fig. 5.15. Si faccia particolare attenzione ai flussi di taglio sul *Pannello 1* e sul *Pannello 3*.

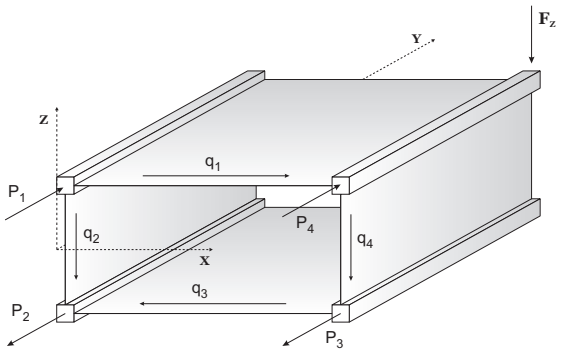



Figura 5.15. Stato di sollecitazione secondo le teorie analitiche della struttura a quattro correnti rettangolare.

Le Tabelle 5.11 e 5.12[2], riassumono i risultati di analisi avanzate.

| | $q_1$ [N/m] | $q_2$ [N/m] | $q_3$ [N/m] | $q_4$ [N/m] |
|---|---|---|---|---|
| SOLID | −0.088 | 0.015 | 0.088 | −21.128 |
| SHELL | −0.381 | 0.293 | −0.242 | −21.530 |
| | | Modelli Classici | | |
| EBBM | 0 | −1.701 | 0 | −1.701 |
| TBM | 0 | −1.701 | 0 | −1.701 |
| | | Taylor | | |
| $N = 4$ | 4.769 | −4.897 | −4.769 | −13.848 |
| $N = 6$ | 5.654 | −5.329 | −5.655 | −13.467 |
| $N = 8$ | 1.478 | −1.204 | −1.478 | −20.060 |
| | | Lagrange | | |
| 8 L9 | −0.060 | 0.008 | 0.061 | −21.846 |

Tabella 5.11. Flussi medi nei pannelli a $y = \frac{L}{2}$. Modelli avanzati. Cassone rettangolare.

I modelli TE di ordine relativamente basso, offrono una buona corrispondenza con i risultati derivanti dal *Semiguscio ideale*. La differenza nelle forze assorbite dai correnti risiede nel fatto che i modelli computazionali considerano correttamente anche i pannelli come resistenti a flessione, così come i correnti a taglio.
I modelli TE di ordine superiore, nonchè il modello LE[3] , mostrano dei risultati

[2]Il segno dei flussi di taglio, $q$, e delle forze nei correnti, $P$, si rifanno al loro verso in base al sistema cartesiano adottato. Una $q_1$ negativa vorrà dire che agisce lungo la direzione $-x$, così come una $P_2$ positiva indicherà una forza agente lungo $y$ sul *Corrente 2* all'incastro.

[3]Anche per il cassone rettangolare il modello LE è stato implementato discretizzando la sezione trasversale della struttura utilizzando un elemento L9 per ogni corrente e uno per ogni pannello.

| | $P_1$ [N] | $P_2$ [N] | $P_3$ [N] | $P_4$ [N] | DOFs |
|---|---|---|---|---|---|
| SOLID | −5.064 | 5.064 | −48.807 | 48.807 | 112200 |
| SHELL | −5.143 | 5.143 | −47.064 | 47.064 | 22020 |
| | | Modelli Classici | | | |
| EBBM | 19.760 | −19.760 | −19.760 | 19.760 | 279 |
| TBM | 19.760 | −19.760 | −19.760 | 19.760 | 279 |
| | | Taylor | | | |
| $N = 4$ | 23.167 | −23.167 | −26.448 | 26.448 | 1395 |
| $N = 6$ | 23.404 | −23.404 | −27.684 | 27.686 | 2604 |
| $N = 8$ | 1.555 | −1.531 | −48.968 | 48.976 | 4185 |
| | | Lagrange | | | |
| 8 L9 | −5.513 | 5.513 | −55.638 | 55.638 | 5952 |

Tabella 5.12. Forze nei correnti all'incastro e numero di gradi di libertà. Modelli avanzati. Cassone rettangolare.

sorprendenti, confermati dai due modelli NASTRAN©[4] (Fig: 5.16 e 5.17): i flussi di taglio sembrano essere nulli su tutti i pannelli, eccezion fatta per il *Pannello 4*.

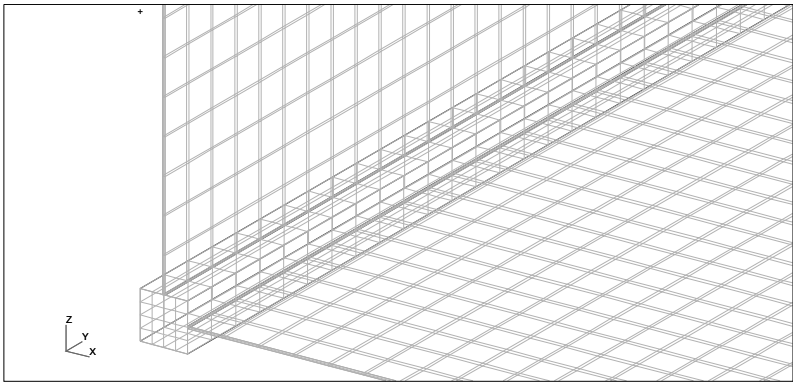



Figura 5.16. Particolare sul *Corrente 2*. Modello SOLID.

In realtà non è così. La Fig. 5.18 mostra l'andamento lungo $x$ degli sforzi di taglio sul *Pannello 3*.
I modelli basati su espansioni polinomiali di Taylor, fino ad un ordine di espansione $N$ minore di 7, non riescono a prevedere correttamente il funzionamento della struttura. Le teorie di ordine superiore e i modelli NASTRAN© descrivono il pannello in esame, e analogamente il *Pannello 1*, come composto da una porzione interessata

[4]Uno implementato con soli elementi solidi, l'altro con una combinazione di solidi (per i correnti) e elementi *shell* (per i pannelli).

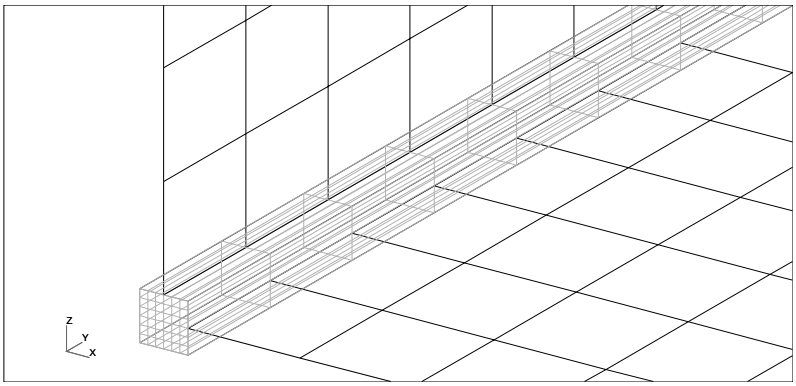



Figura 5.17. Particolare sul *Corrente 2*. Modello SHELL.

da $\sigma_{xy}$ positive ed un'altra interessata da $\sigma_{xy}$ negative: l'andamento delle tensioni taglianti i "pannelli orizzontali" assumono un andamento a doppia semionda. Le risultanti, quindi, risultano essere nulle.
Naturalmente non lo sono. La Fig. 5.19 mostra il reale stato di sollecitazione del cassone rettangolare soggetto a flesso-torsione.

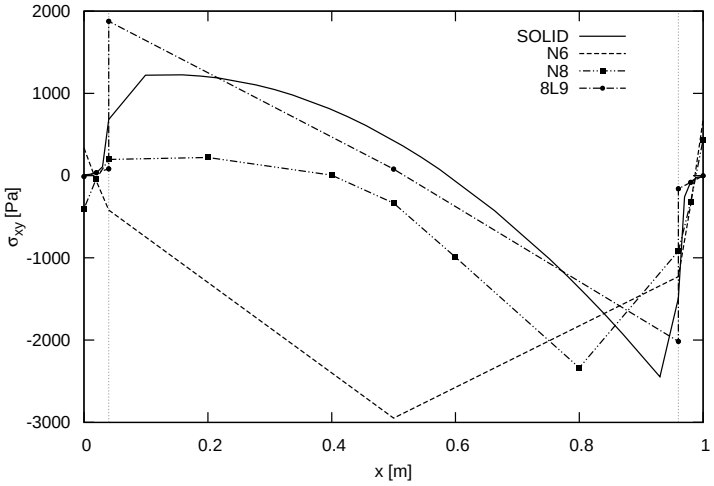



Figura 5.18. Distribuzione lungo $x$ delle tensioni tangenziali, $\sigma_{xy}$, sul *Pannello 3*, a $y = \frac{L}{2}$, $z = -\frac{h}{2} + \frac{a}{2}$. Cassone rettangolare.

I flussi di taglio, $q_1$ e $q_3$, di conseguenza, influenzeranno le forze che agiscono nei correnti. In particolare, per effetto dello *shear lag*, i *Correnti 1* e *2* risultano avere un

carico minore, mentre i *Correnti 3* e *4* sono sovraccaricati rispetto a quanto descritto da modelli meno complessi.

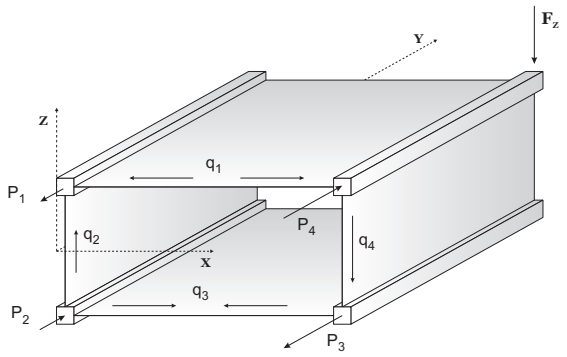



Figura 5.19. Reale stato di sollecitazione della struttura rettangolare.

Questo fenomeno può essere riconducibile alla mancanza di irrigidimenti trasversali. Le centine garantiscono il corretto funzionamento della struttura, aumentando adeguatamente la rigidezza nel piano della sezione. Del resto, i modelli analitici basati sul *Semiguscio ideale*, si basano sull'ipotesi che la sezione trasversale possieda rigidezza infinita nel piano.

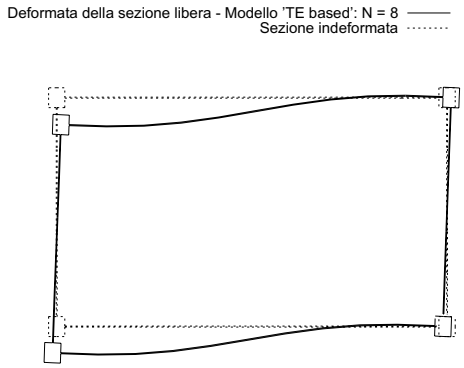



Figura 5.20. Confronto tra la condizione deformata e indeformata della sezione caricata del cassone rettangolare. Fattore di amplificazione $\times 10000$.

I modelli avanzati di ordine elevato sono, quindi, in grado di mostrarci l'effetto di un cattivo dimensionamento di una centina, o di un cedimento della stessa.
La Fig. 5.20 mostra la particolare deformata della sezione all'estremità libera. Da questa è possibile apprezzare l'elevata deformabilità della struttura nel piano, la quale perde la propria forma originale.
Infine in Fig. 5.21 si riporta l'andamento dello sforzo di taglio sul *Pannello 4*.
Si noti l'ottima corrispondenza tra il modello NASTRAN© e il modello *LE-based*.

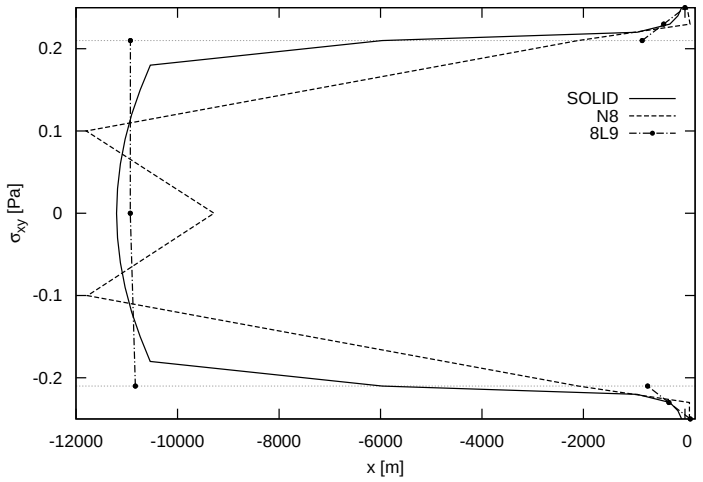



Figura 5.21. Distribuzione lungo $z$ delle tensioni tangenziali, $\sigma_{yz}$, sul *Pannello 4*, a $x = b - \frac{a}{2}$, $y = \frac{L}{2}$. Cassone rettangolare.

### 5.6.1 Implementazione dell'Irrigidimento Trasversale

Le centine possono essere considerate come strutture mono - dimensionali dall'allungamento estremamente basso (Fig. 5.22).

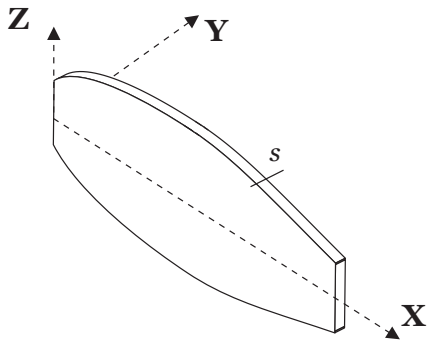



Figura 5.22. Centina alare.

Un lavoro precedente [13] dimostra che i modelli 1D avanzati basati sulla CUF sono in grado di descrivere in modo adeguato il comportamento di questi irrigidimenti trasversali. In particolare si è visto che:

1. i modelli presentati sono capaci di predire correttamente gli spostamenti e lo stato di sollecitazione di una trave molto tozza. I risultati mostrano chiaramente la capacità dei modelli *higher-order* di rilevare il comportamento 3D delle centine sottili considerate;

2. è necessaria una teoria almeno del quinto ordine per ottenere una buona accuratezza nei risultati.

Lo stesso lavoro mostra come sia possibile prevedere gli effetti di centine sulle strutture e di come queste riducano il *warping* della sezione trasversale: aumentando il numero di centine lungo l'asse longitudinale della struttura, la soluzione tende a quella offerta dai modelli classici.
La capacità di questi innovativi modelli di descrivere tale tipologia di strutture come se fossero semplici travi è uno dei punti di forza della formulazione. Il numero dei gradi di libertà tipicamente coinvolto in queste analisi viene drasticamente ridotto, a parità di accuratezza, ed è possibile far fronte alla necessità di combinare diversi modelli (1D e 2D) per analizzare correnti e centine.
Riprendiamo il cassone rettangolare a quattro pannelli e quattro correnti di Fig. 5.14. A parità di geometria, di condizioni di carico e di vincolo, viene aggiunta una centina avente spessore $s = 0.002$ [m] all'estremità libera, così come mostrato in Fig. 5.23.

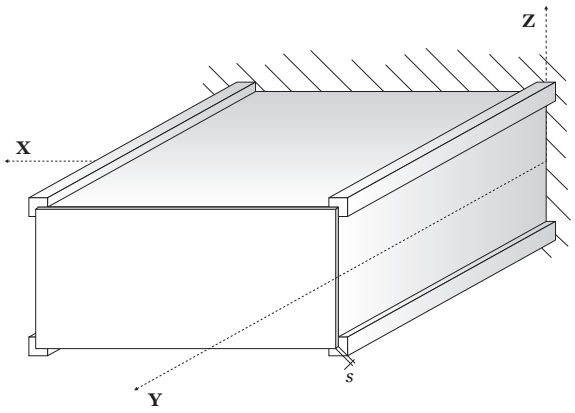



Figura 5.23. Cassone rettangolare con centina.

Cominciamo subito col dire che quel fenomeno osservato in assenza della centina scompare. La Fig. 5.24 mostra la deformata della sezione d'estremità. Confrontando questa con quella di Fig. 5.20 osserviamo che la sezione, sebbene deformandosi, mantiene la sua forma. Il *"modo di apertura"* del cassone scompare, e la struttura torna a lavorare propriamente.
L'analisi dello stato di sollecitazione della struttura in esame, riportato nelle Tabelle 5.13 e 5.14, conferma quanto detto. Inoltre si osserva una ridistribuzione del carico

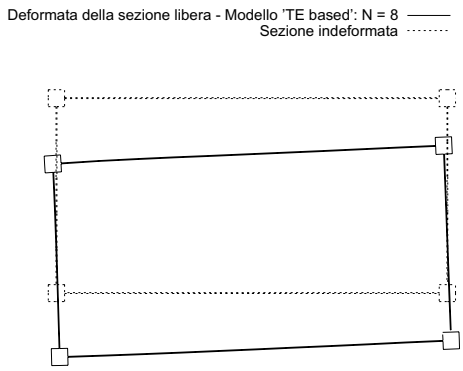



Figura 5.24. Deformata della sezione caricata del cassone rettangolare con centina. Fattore di amplificazione $\times 10000$.

| | $q_1$ [N/m] | $q_2$ [N/m] | $q_3$ [N/m] | $q_4$ [N/m] |
|---|---|---|---|---|
| SOLID | 5.024 | −5.024 | −5.024 | −16.089 |
| SHELL | 5.024 | −5.200 | −5.149 | −16.651 |
| | Modelli Analitici | | | |
| SP | 5.221 | −5.221 | −5.221 | −16.518 |
| TS | 5.435 | −5.435 | −5.435 | −16.304 |
| | Modelli Classici | | | |
| EBBM | 0 | −1.701 | 0 | −1.701 |
| TBM | 0 | −1.701 | 0 | −1.701 |
| | Taylor | | | |
| $N = 4$ | 4.470 | −4.603 | −4.470 | −14.142 |
| $N = 6$ | 4.848 | −4.579 | −4.846 | −14.218 |
| $N = 8$ | 4.647 | −5.148 | −4.894 | −16.240 |
| | Lagrange | | | |
| 8 L9, 9 L9 + 8 L4 | 5.102 | −5.173 | −5.111 | −16.667 |

Tabella 5.13. Flussi medi nei pannelli a $y = \frac{L}{2}$. Cassone rettangolare con centina.

all'incastro: i *Correnti 3* e *4* si scaricano rispetto al caso precedente, a discapito dei *Correnti 1* e *2*. Ciò è dovuto al fatto che l'angolo di torsione in prossimità della sezione di radice è maggiore che nel caso del cassone non rinforzato. La centina non permette alla sezione trasversale di deformarsi nel proprio piano e di conseguenza la soluzione si avvicina a quelle delle teorie analitiche: anche per i modelli *higher order* l'andamento dei flussi di taglio e delle forze nei correnti torna ad essere descritto propriamente dalla Fig. 5.15.

L'aggiunta della centina per il modello LE ha reso necessaria l'implementazione di nuove procedure all'interno del codice. Queste permettono di variare il tipo e il numero degli elementi *Lagrange*, ovvero l'ordine di espansione della teoria stessa, lungo l'asse $y$ della trave. Al cassone senza irrigidimento trasversale, discretizzato

| | $P_1$ [N] | $P_2$ [N] | $P_3$ [N] | $P_4$ [N] | DOFs |
|---|---|---|---|---|---|
| SOLID | 19.522 | −19.532 | −22.222 | 22.222 | 115362 |
| SHELL | 19.594 | −19.594 | −22.328 | 22.328 | 22346 |
| | | Modelli Analitici | | | |
| SP | 31.325 | −31.325 | −33.893 | 33.893 | - |
| TS | 32.609 | −32.609 | −32.609 | 32.609 | - |
| | | Modelli Classici | | | |
| EBBM | 19.757 | −19.757 | −19.757 | 19.757 | 306 |
| TBM | 19.757 | −19.757 | −19.757 | 19.757 | 306 |
| | | Taylor | | | |
| $N = 4$ | 23.197 | −23.197 | −26.418 | 26.418 | 1530 |
| $N = 6$ | 23.529 | −23.523 | −27.567 | 27.556 | 2856 |
| $N = 8$ | 23.803 | −23.837 | −26.579 | 26.722 | 4490 |
| | | Lagrange | | | |
| 8 L9, 9 L9 + 8 L4 | 23.694 | −23.694 | −26.431 | 26.431 | 6588 |

Tabella 5.14. Forze nei correnti all'incastro e numero dei gradi di libertà. Cassone rettangolare con centina.

con 8 elementi L9 sulla sezione, è stata aggiunta una centina composta da 9 elementi L9 (di cui 8 in comune col caso precedente) e 8 elementi L4, così come mostrato in Fig. 5.25. La figura non è scalata.

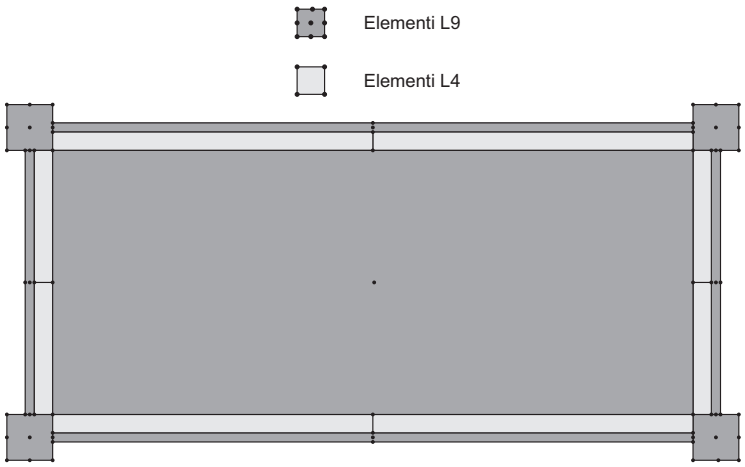



Figura 5.25. Discretizzazione della sezione trasversale della centina per il modello LE.

Questa particolare disposizione degli elementi *Lagrange* è stata dettata da motivi di connessione dei nodi sulla sezione all'interfaccia cassone-centina. Saremmo pervenuti allo stesso risultato discretizzando la centina con gli stessi 8 elementi L9 che

costituiscono pannelli e centine, aumentando però opportunamente il modulo elastico degli elementi posti in corrispondenza dell'irrigidimento trasversale stesso, in modo da renderla infinitamente rigida nel piano.
La Fig. 5.26 mostra l'andamento lungo l'asse $x$ delle tensioni tangenziali $\sigma_{xy}$. Risulta evidente che, rispetto al caso precedente, la variazione degli sforzi nel pannello non presenta più un cambiamento di segno.
Il modello SOLID è stato implementato modellizzando anche la centina con elementi *solidi*, mentre il modello SHELL discretizzandola con elementi *piastra*, così come per i pannelli che costituiscono la struttura.
I modelli CUF mono - dimensionali sono stati implementati discretizzando la trave lungo il suo asse con 11 elementi B4: 10 per la struttura composta dai correnti e dai pannelli e 1 per la centina al *tip*.

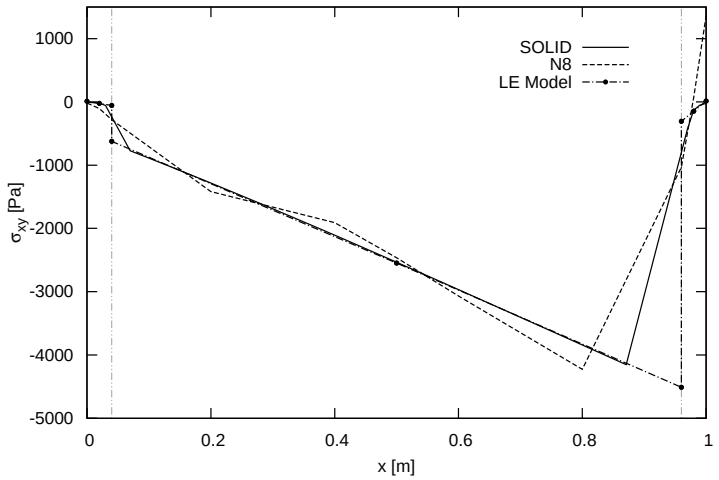



Figura 5.26. Distribuzione lungo $x$ delle tensioni tangenziali, $\sigma_{xy}$, sul *Pannello 3*, a $y = \frac{L}{2}$, $z = -\frac{h}{2} + \frac{a}{2}$.

### 5.6.2 Considerazioni sullo Spessore della Centina

Le centine rivestono, come visto, un ruolo di primo piano nelle strutture aerospaziali. Queste devono soddisfare requisiti di robustezza e di resistenza, garantendo al contempo il minimo peso da portare in volo.
Nell'analisi che segue si studia il comportamento del cassone rettangolare a quattro correnti e quattro pannelli di Fig. 5.24 al variare dello spessore della centina al

*tip*, allo scopo di identifiacare lo spessore minimo dell'irrigidimento trasversale che garantisca il corretto funzionamento della struttura.
I risultati che seguono derivano tutti da un modello TE di ottavo ordine.
La Tabella 5.15 riporta le forze che agiscono sui correnti all'incastro e i flussi medi nei pannelli a $y = \frac{L}{2}$ per diversi spessori, $s$, della centina.

| | $s = 2$ [mm] | $s = 1$ [mm] | $s = 0.5$ [mm] | $s = 0.25$ [mm] | $s = 0.1$ [mm] |
|---|---|---|---|---|---|
| $q_1$ [N/m] | 4.647 | 4.602 | 4.536 | 4.427 | 4.161 |
| $q_2$ [N/m] | −5.148 | −5.182 | −5.183 | −5.127 | −4.972 |
| $q_3$ [N/m] | −4.894 | −4.859 | −4.782 | −4.646 | −4.336 |
| $q_4$ [N/m] | −16.240 | −16.244 | −16.216 | −16.154 | −16.101 |
| $P_1$ [N] | 23.803 | 23.595 | 23.216 | 22.551 | 20.944 |
| $P_2$ [N] | −23.837 | −23.611 | −23.210 | −22.509 | −20.802 |
| $P_3$ [N] | −26.579 | −26.765 | −27.134 | −27.806 | −29.440 |
| $P_4$ [N] | 26.772 | 26.950 | 27.359 | 28.069 | 29.788 |

Tabella 5.15. Forze nei correnti all'incastro e flussi medi nei pannelli a $y = \frac{L}{2}$. Confronto tra modelli del cassone rettangolare con centine di spessore diverso. Modelli TE di ottavo ordine.

La Fig. 5.27 mostra chiaramente che al diminuire di $s$ la struttura tende a far lavorare maggiormente il longherone posto in prossimità del carico, scaricando il resto della struttura. I *Correnti 3* e *4* risultano essere sovraccaricati, mentre i *Pannelli 1*, *2* e *3* si scaricano. Risulta chiaro quindi un altro fondamentale compito dell'irrigidimento trasversale: oltre ad evitare deformazioni della sezione nel suo piano, la centina provvede a distribuire in modo uniforme il carico sul tutto il cassone, facendo lavorare la struttura in modo opportuno.
Come si può notare, nel tracciare questo grafico, si sono utilizzati valori adimensionali. I valori delle forze $P$ sono stati opportunamente scalati con dei valori di riferimento. Per confronto si è scelto di usare la soluzione fornita dal modello del *semiguscio puro*, riassunta nelle Tabelle 5.9 e 5.10.
Importanti considerazioni possono farsi anche dall'analisi delle deformazioni della struttura.
La figura appena descritta e la Fig. 5.28, che mostra la deformata della sezione posta a $y = L$, dicono che riducendo lo spessore $s$ oltre i 0.5 [mm] cominciano ad innescarsi i fenomeni di cui si è ampiamente discusso. In particolare la Fig. 5.28 indica che oltre questo valore, la struttura comincia a subire deformazioni nel piano della sezione dovute ad una bassa rigidezza trasversale.

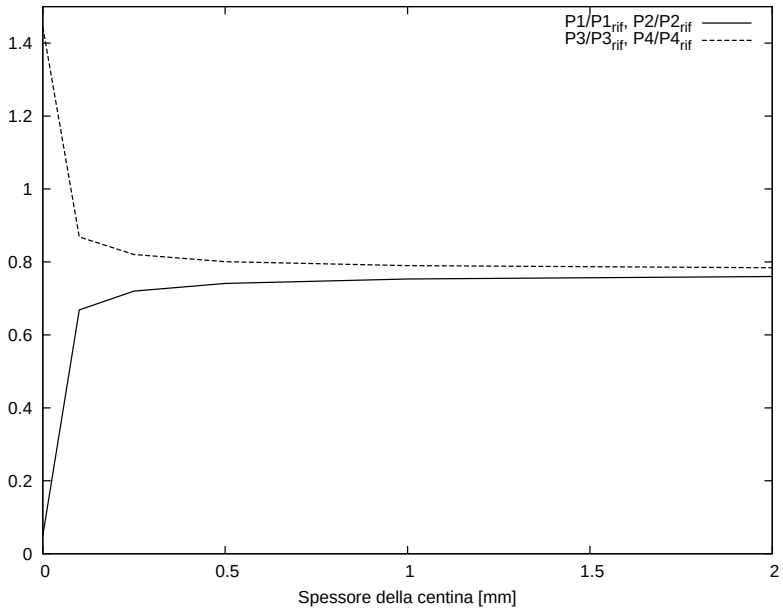
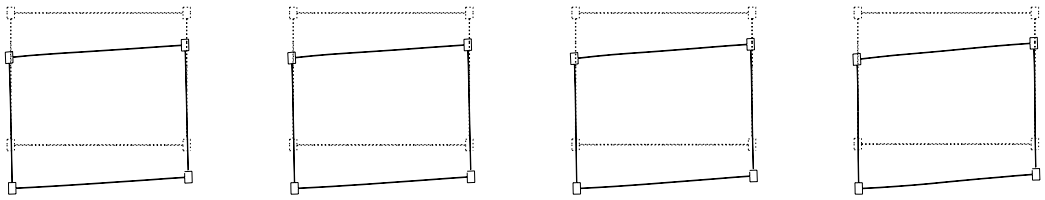
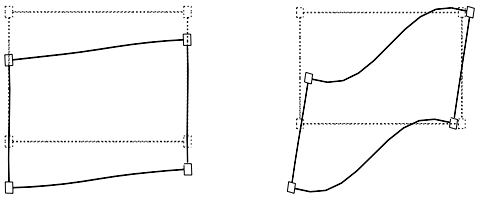



Figura 5.27. Andamento delle forze nei correnti all'incastro al variare dello spessore, $s$, della centina. Modelli TE di ottavo ordine.



(a) $s = 2$ mm (b) $s = 1$ mm (c) $s = 0.5$ mm (d) $s = 0.25$ mm



(e) $s = 0.1$ mm (f) $s = 0$ mm

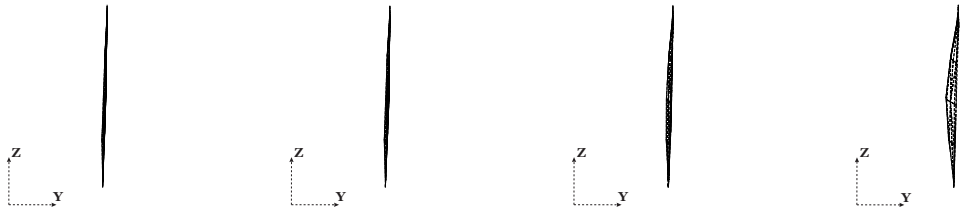
Figura 5.28. Deformate della sezione d'estremità del cassone rettangolare al variare dello spessore della centina. Modelli TE di ottavo ordine. Fattore di amplificazione $\times 50000$.

A questi fenomeni si accompagna un *ingobbamento* della centina verso l'interno del cassone. La Tabella 5.16 riassume lo spostamento $u_y$ del punto mediano della centina, al variare di $s$.

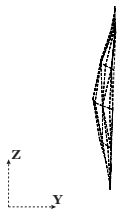
| | $s = 2$ [mm] | $s = 1$ [mm] | $s = 0.5$ [mm] | $s = 0.25$ [mm] | $s = 0.1$ [mm] |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_y \times 10^6$ [m] | $-0.159$ | $-0.191$ | $-0.465$ | $-1.095$ | $-2.092$ |

Tabella 5.16. Spostamento lungo $y$ del punto intermedio della centina. Modelli TE di ottavo ordine.

La Fig. 5.29 mostra come centine troppo sottili cedono sotto carico, presentando deformazioni fuori dal proprio piano.
Questi ragionamenti ci portano a preferire la soluzione $s = 1$ [mm], la quale garantisce un buon funzionamento del cassone.




(a) $s = 2$ mm (b) $s = 1$ mm (c) $s = 0.5$ mm (d) $s = 0.25$ mm




(e) $s = 0.1$ mm

Figura 5.29. Deformazione fuori dal piano della centina al variare del suo spessore. Modelli TE di ottavo ordine. Fattore di amplificazione $\times 50000$.

Per completezza si riportano di seguito i risultati di analisi effettuate con modelli *Lagrange Expansion - based*, modellizzati come descritto nel Paragrafo precedente. In Tabella 5.17 sono riassunte le incognite del problema al variare dello spessore della centina.
Infine la Fig. 5.30 mostra la condizione deformata del cassone rettangolare con la centina di spessore $s = 1$ [mm] al *tip*.

| | $s = 2$ [mm] | $s = 1$ [mm] | $s = 0.5$ [mm] | $s = 0.25$ [mm] | $s = 0.1$ [mm] |
|---|---|---|---|---|---|
| $q_1$ [N/m] | 5.102 | 5.066 | 4.996 | 4.859 | 4.487 |
| $q_2$ [N/m] | −5.173 | −5.138 | −5.067 | −4.929 | −4.558 |
| $q_3$ [N/m] | −5.111 | −5.075 | −5.003 | −4.863 | −4.488 |
| $q_4$ [N/m] | −16.667 | −16.706 | −16.778 | −16.914 | −17.283 |
| $P_1$ [N] | 23.694 | 23.490 | 23.086 | 22.307 | 20.203 |
| $P_2$ [N] | −23.694 | −23.490 | −23.086 | −22.307 | −20.203 |
| $P_3$ [N] | −26.431 | −27.039 | −27.039 | −27.818 | −29.922 |
| $P_4$ [N] | 26.431 | 27.039 | 27.039 | 27.818 | 29.922 |

Tabella 5.17. Forze nei correnti all'incastro e flussi medi nei pannelli a $y = \frac{L}{2}$. Confronto tra modelli del cassone rettangolare con centine di spessore diverso. Modelli LE.

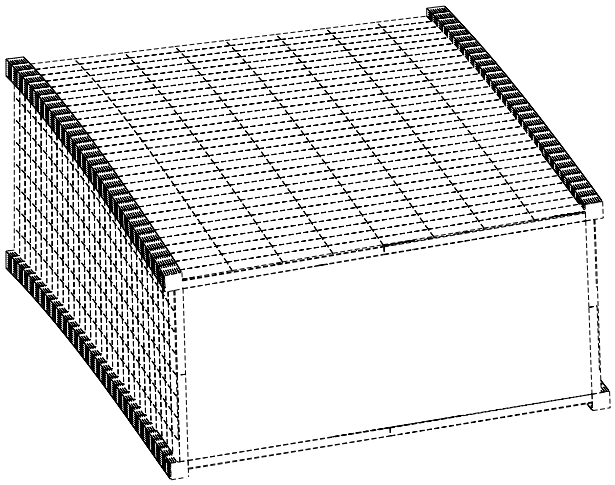
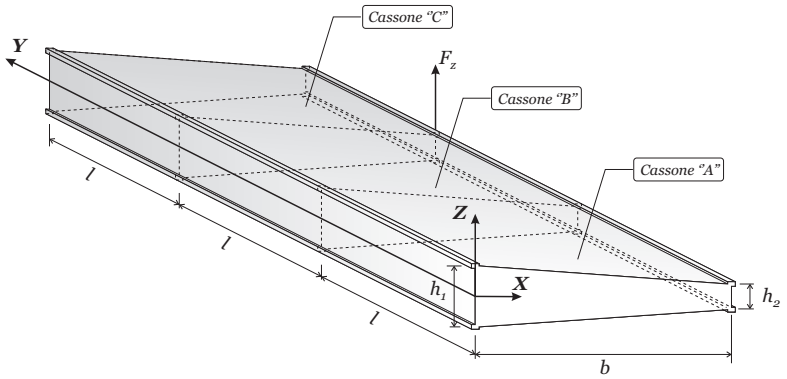


Figura 5.30. Deformata 3D del cassone avente centina con spessore $s = 1$ [mm]. Modello LE. Fattore di amplificazione $\times 50000$.

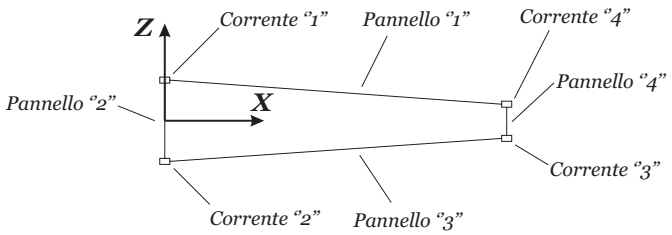
# Capitolo 6

# Analisi Statica di un Tronco Alare

Consideriamo la struttura multi-cassone di Fig. 6.1.




(a)




(b)

Figura 6.1. Tronco alare (a) e sua sezione trasversale (b).

Questa rappresenta un tipico tronco alare ad allungamento ridotto.
Discontinuità di torsione e taglio sono introdotte, ad una distanza pari ad $2 \times l$ dalla sezione di radice, tramite l'applicazione di una forza $F_z = 20$ [N], in corrispondenza del longherone posteriore, nel punto $[b,\ 2 \times l,\ \frac{h_2}{2}]$. La trave risulta incastrata alla radice. In Tabella 6.1 sono riportate le dimensioni geometriche.

| Area correnti $[m^2]$ | Spessore anime $[m]$ | Spessore pannelli $[m]$ | $l$ $[m]$ | $b$ $[m]$ | $h_1$ $[m]$ | $h_2$ $[m]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $8 \times 10^{-4}$ | $1.6 \times 10^{-3}$ | $8 \times 10^{-4}$ | 0.5 | 1 | 0.16 | 0.08 |

Tabella 6.1. Dimensioni del tronco alare.

## 6.1 Risoluzione mediante Modelli Analitici

Per determinare le forze interne della trave analizzata in questo capitolo tramite modelli analitici, potremmo pensare di utilizzare la teoria della *trave a semiguscio*. Dai risultati di tale analisi, per quanto visto nel Capitolo 5, ci aspettiamo risultati non accurati. Tuttavia, possiamo sfruttare questa teoria semplificata per ottenere le forze interne per il "sistema di base".
È possibile, cioè, utilizzare il *Principio dei Lavori Virtuali* per correggere soluzioni approssimate relative al "sistema 0", purchè quest'ultimo sia globalmente equilibrato [2, 35]. È possibile dunque introdurre dei "sistemi $X$" che abbiano significato di sistemi correttivi. Una delle soluzioni approssimate che ben si presta ad essere corretta è proprio la soluzione ottenibile con l'applicazione della teoria TS. Questa infatti fornisce una soluzione in equilibrio con i carichi esterni, che rappresenta la proprietà tipica del "sistema 0".
Il sistema reale è quindi pensato come sovrapposizione del sistema soluzione "0" in equilibrio con i carichi esterni, corrispondente alla soluzione *trave a semiguscio*, e di un certo numero di sistemi correttivi in cui una delle incognite è stata sostituita con una iperstatica.
Le forze nei correnti relative alla soluzione TS, calcolate con la formula di Navier (Eq. 5.3), sono riportate in Fig. 6.3a. I flussi di taglio relativi al "sistema 0" sono nulli nel *Cassone C*, essendo qui nulli taglio e momento flettente. In Fig. 6.4a vengono riportati i flussi risultanti di ognuno dei cassoni per la soluzione TS.
La struttura presenta tre iperstaticità. Ciò si nota *"tagliando"* ognuno dei correnti in corrispondenza dell'incastro e delle centine interne. Ad ogni sezione trasversale resterebbero tre forze longitudinali incognite, che possono essere ricavate dalle equazione di equilibrio alla traslazione nella direzione assiale e dall'equilibrio alla rotazione attorno gli assi $x$ e $z$. I flussi di taglio sarebbero uguali sui due *Pannelli 1* e *3* in ogni sezione, dando solo tre flussi incogniti. Questi si possono ricavare dall'equilibrio alla traslazione nelle direzioni $x$ e $z$ e dall'equazione di equilibrio alla rotazione attorno a $y$. Dal momento che la struttura può essere resa staticamente determinata con tre *"disinnesti"*, risulta tre volte iperstatica.
La soluzione TS, sebbene soddisfi l'equilibrio, non assicura la congruenza. Facciamo in modo che $X_1$, $X_2$ e $X_3$ siano le forze iperstatiche che, aggiunte alle forze del "sistema 0", diano le forze reali agenti nel *Corrente 2* alla distanza 0, $l$ e $2 \times l$ dalla sezione di radice. Ad ognuna di queste distanze otteniamo un sistema di forze assiali

che sono in equilibrio con la forza iperstatica nel *Corrente 2*, determinando le forze nei tre rimanenti correnti tramite le equazioni di equilibrio di forze nella direzione assiale e di momento attorno gli assi $z$ e $x$. Le forze nei correnti dovute alla iperstatica $X_3$ nel *Corrente 2* a $y = 2 \times l$ sono mostrate in Fig. 6.2. Le forze assiali equilibranti per i sistemi $X_1$ e $X_2$ si ricavano in modo analogo. Per ognuna delle iperstatiche, le forze assiali sono riassunte dalla Fig. 6.3b alla d. I flussi di taglio

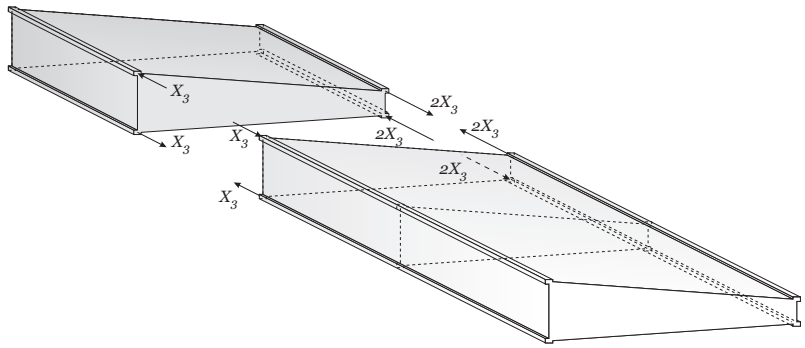



Figura 6.2. Forze nei correnti per il sistema $X_3$.

che accompagnano le forze iperstatiche possono essere ricavate mediante l'analogia fluido-dinamica e sono riportati dalla Fig. 6.4b alla d.
A questo punto non resta che applicare il PLV per tre volte, cambiando ogni volta *sistema equilibrato virtuale*. Si tratta di applicare il PLV adottando come sistema fittizio prima il "sistema $X_1$", poi il "sistema $X_2$" ed infine il "sistema $X_3$": in questo modo si ottengono tre equazioni che consentono di determinare le tre incognite iperstatiche [2, 35]. Si ricava:

$$\sum_k \left\{ \frac{l}{6EA} \left[ \overline{P}_{A_i}(2P_A + P_B) + \overline{P}_{B_i}(P_A + 2P_B) \right] \right\} + \sum_k \left( \frac{q\overline{q}_i bl}{Gs} \right) = 0, \qquad i = 1,2,3 \quad (6.1)$$

Dove le sommatorie si estendono a tutti i correnti e i pannelli. In quest'equazione $P_A$ e $P_B$ sono le forze reali nei correnti alla fine di ogni cassone, mentre $\overline{P}_{A_i}$ e $\overline{P}_{B_i}$ sono le forze corrispondenti per il sistema $X_i = 1$. I flussi $q$ sono i reali, e i $\overline{q}_i$ sono i flussi dovuti a $X_i = 1$.
Per il caso in esame, considerando la struttura completamente composta da una lega leggera 2024 (G/E = 0.4), si ricava:

$$X_1 = -1822.3 \qquad X_2 = -345.6 \qquad X_3 = 695.4$$

Sommando le forze del "sistema 0" e dei sitemi iperstatici si ottiene la soluzione *semiguscio puro*.
Le Fig. 6.5 e 6.6 confrontano la soluzione ottenuta con il modello TS e la soluzione corretta SP. In particolare queste riportano l'andamento delle incognite lungo l'apertura alare.

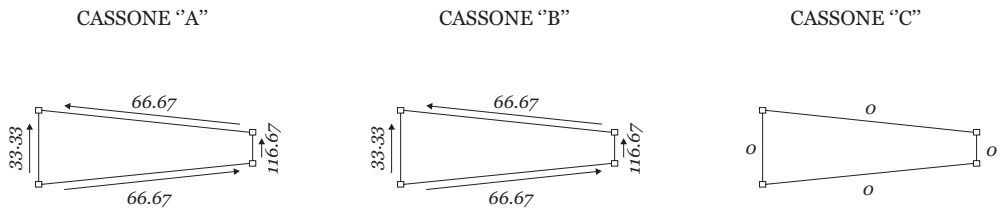
(a) Soluzione TS

(b) Sistema di carico $X_3$

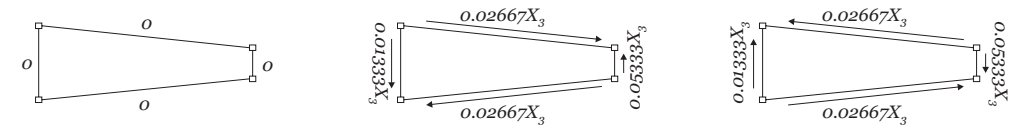
(c) Sistema di carico $X_2$

(d) Sistema di carico $X_1$

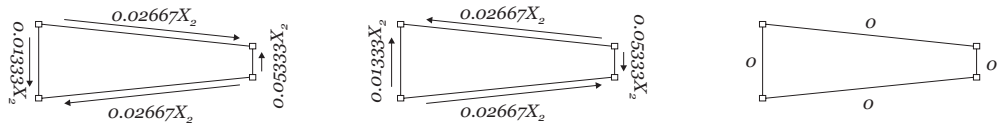
Figura 6.3. Forze nei correnti per il "sistema 0" e per i sistemi correttivi.



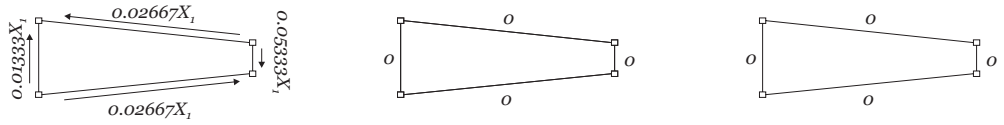

(a) Soluzione TS




(b) Sistema di carico $X_3$




(c) Sistema di carico $X_2$




(d) Sistema di carico $X_1$

Figura 6.4. Flussi di taglio per il "sistema 0" e per i sistemi correttivi. Grandezze espresse in [N/m].

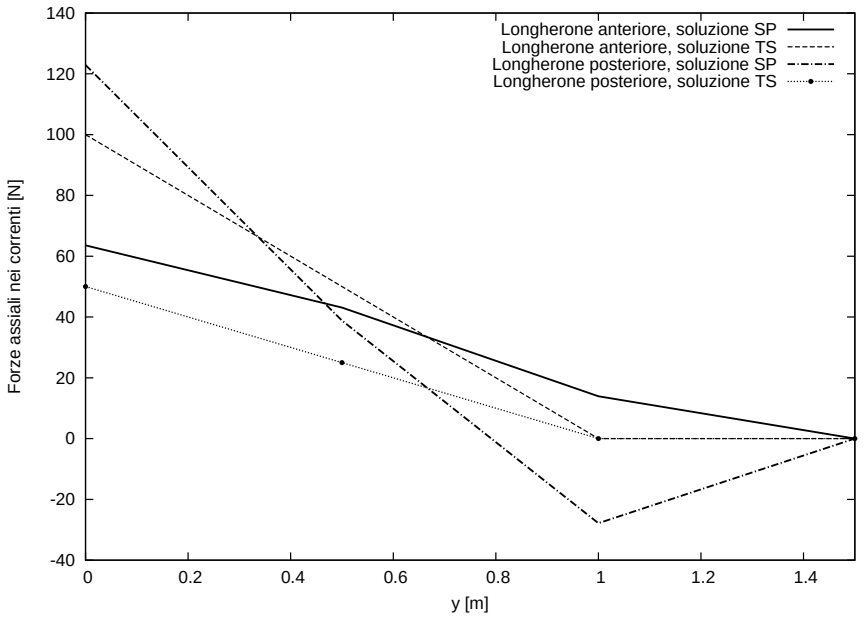



Figura 6.5. Andamento forze normali in corrispondenza dei *Correnti 2* e *3*. Confronto tra le teorie analitiche.

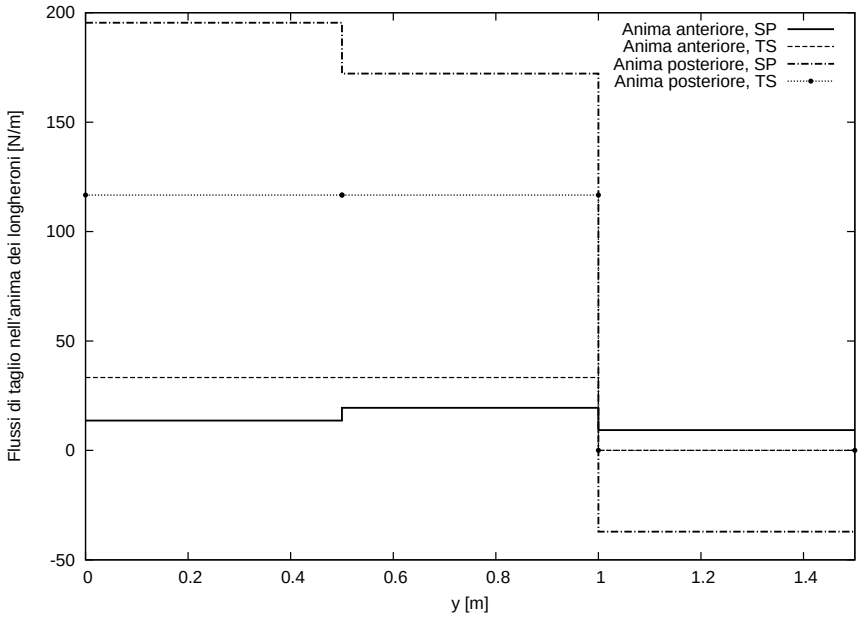



Figura 6.6. Andamento flussi di taglio in corrispondenza dell'anima dei longheroni. Confronto tra le teorie analitiche.

## 6.2 Risoluzione mediante Modelli CUF

Una delle ipotesi fondamentali dei modelli appena descritti, basati sul *Semiguscio ideale*, prevede, come detto, la presenza di centine infinitamente rigide nel proprio piano.
Nell'implementazione dei modelli avanzati mono - dimensionali si è scelto di inserire centine avente spessore $s = 8 \times 10^{-4}$ [m]. L'esperienza finora accumulata, infatti, ci dice che un irrigidimento trasversale che presenta un tale ingombro rappresenta il miglior compromesso tra peso e rigidezza.
I modelli LE presentano una discretizzazione della sezione trasversale analoga al caso del cassone rettangolare trattato nel Paragrafo 5.6: è presente un elemento L9 per ogni corrente e pannello. Anche l'implementazione della centina è stata effettuata seguendo lo schema di Fig. 5.25.
L'intera struttura è composta da una lega d'alluminio 2024.
La discretizzazione lungo l'asse $y$ è stata effettuata, sia per i modelli TE che per i modelli LE, utilizzando cinque elementi B4 per ogni cassone, ed un elememento B4 per ogni centina, per un totale di diciotto elementi trave a quattro nodi.
La Fig. 6.7 mostra la deformata 3D del tronco analizzato tramite il modello LE, mentre la Fig. 6.8 confronta la deformata del modello LE e TE di nono ordine della sezione caricata a $y = 2 \times l$.

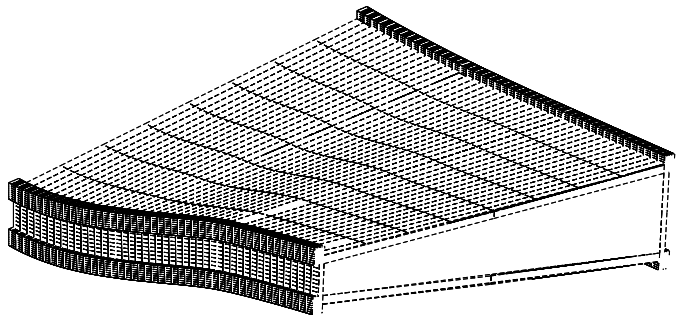


Figura 6.7. Deformata 3D del tronco alare. Modello LE. Fattore di amplificazione $\times 10000$.

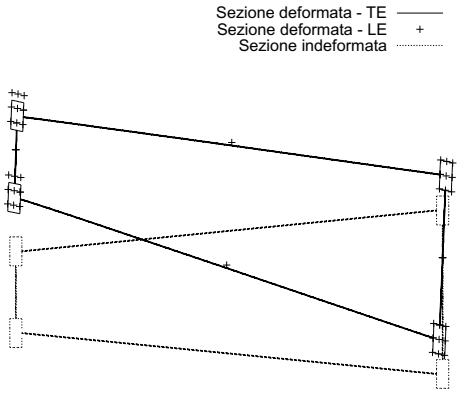



Figura 6.8. Condizione deformata e indeformata della sezione caricata a $y = 2 \times l$. Confronto tra il modello LE e il modello TE di nono ordine. Fattore di amplificazione $\times 10000$.

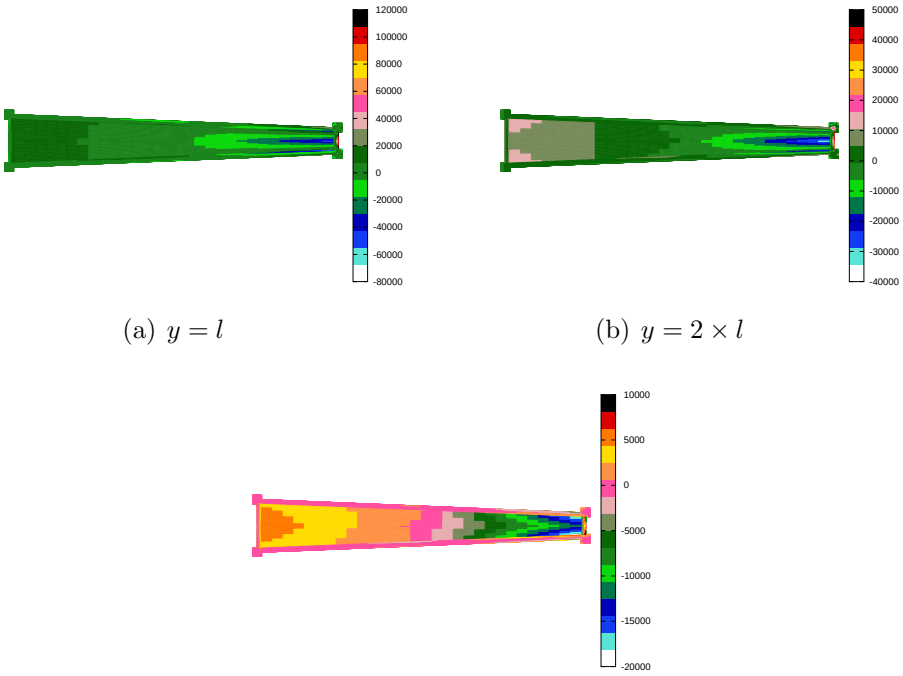
Per un miglior confronto in Tabella 6.2 si riporta lo spostamento $u_z$ del punto caricato e il numero dei gradi di libertà coinvolto nel calcolo per i vari modelli implementati.

| | $u_z \times 10^5$ [m] | DOFs |
|---|---|---|
| Modelli Classici | | |
| EBBM | 0.464 | 495 |
| TBM | 0.477 | 495 |
| Taylor | | |
| $N = 3$ | 0.793 | 1650 |
| $N = 5$ | 1.108 | 3465 |
| $N = 7$ | 1.251 | 5940 |
| $N = 9$ | 1.325 | 9075 |
| Lagrange | | |
| 8 L9, 9 L9 + 8 L4 | 1.397 | 10750 |

Tabella 6.2. $u_z$ del punto caricato e numero di gradi di libertà.

Come visto i migliori risultati sono restituiti dai modelli LE, i quali si avvicinano maggiormente alle soluzioni offerte dai modelli NASTRAN© a elementi solidi. Per questo motivo questi risultati saranno considerati come riferimento nel confronto con altre teorie.
Per ciò che riguarda il generale stato di tensione della struttura valgono le stesse considerazioni del Capitolo 5. In particolare l'andamento lungo $z$ degli sforzi assiali $\sigma_{yy}$ in corrispondenza dei due longheroni risulta analogo a quanto già mostrato in Fig. 5.7, mentre l'andamento delle tensioni tangenziali all'interno delle anime dei

longheroni e dei pannelli si presenta del tutto confrontabile con quanto visto, rispettivamente, nelle Fig. 5.21 e 5.26.
Interessante risulta l'analisi dello stato di tensione delle centine. Queste, essendo state già definite come corpi ad allungamento estremamente basso, e data la particolare condizione di carico, risultano lavorare principalmente a taglio. In Fig. 6.9 si riporta l'andamento della componente di tensione $\sigma_{yz}$. I risultati presentati si rifanno all'analisi effettuata tramite il modello LE-based.

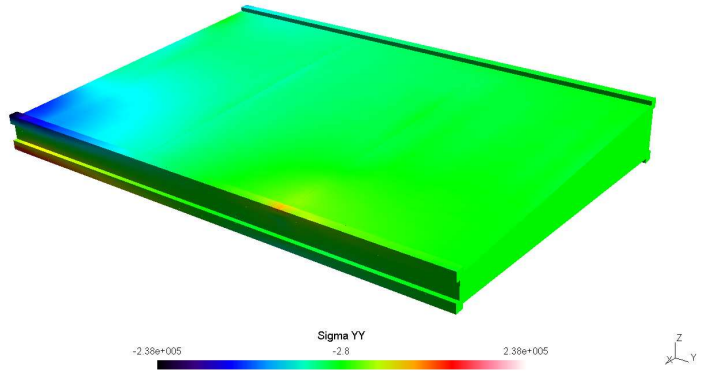



(a) $y = l$ (b) $y = 2 \times l$

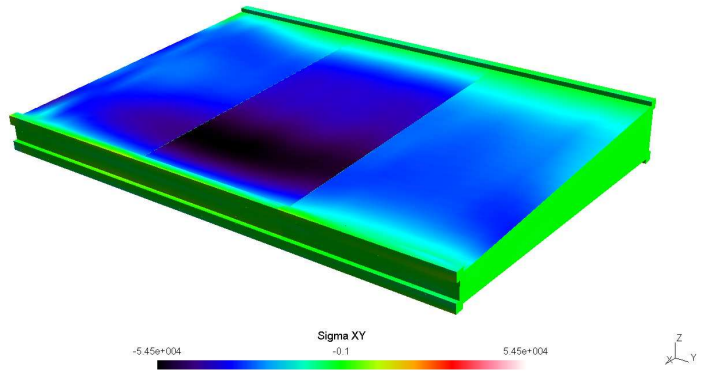
(c) $y = 3 \times l$

Figura 6.9. Tensioni tangenziali, $\sigma_{yz}$, in corrispondenza delle centine. Modello LE.

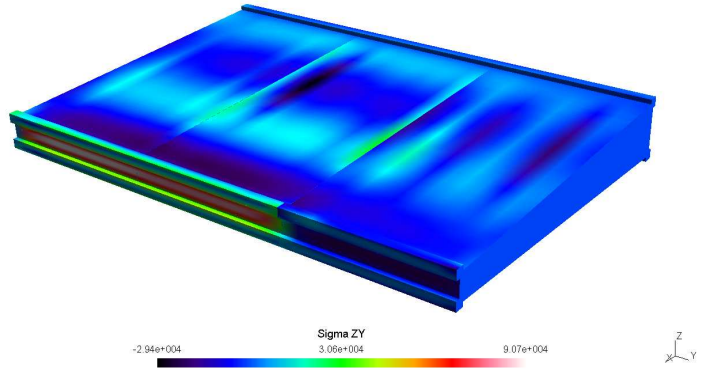
La Fig. 6.10 mostra lo stato di tensione del tronco alare. Si riporta l'andamento delle tensioni $\sigma_{yy}$ (Fig. 6.16a), $\sigma_{xy}$ (Fig. 6.16b) e $\sigma_{yz}$ (Fig. 6.16c).
Nelle Tabelle 6.3 e 6.4 vengono riassunte le risultanti di tensione. Queste vengono calcolate in sezioni caratteristiche. In particolare si calcolano i flussi medi nei pannelli, così come definiti nell'Eq. 5.7, sulle sezioni intermedie di ogni cassone, e le forze agenti nei correnti nella sezione all'incastro e nelle sezioni poste in corrispondenza delle centine. In queste tabelle vengono riportati anche i risultati calcolati tramite i modelli basati sul *Semiguscio ideale*, in modo da permetterne un confronto.
Le Fig. 6.11 e 6.12 mostrano l'andamento lungo l'apertura alare rispettivamente delle tensioni di taglio $\sigma_{yz}$ in corrispondenza del *Pannello 4* in $x = b$, $z = 0$, e delle tensioni normali $\sigma_{yy}$ sul *Corrente 3* in $x = b$, $z = -\frac{h_2}{2}$.




(a)




(b)




(c)

Figura 6.10. Stato di tensione del tronco alare senza centine. Modello TE del nono ordine.

| $y$ [m] | $q_1$ [N/m] | $q_2$ [N/m] | $q_3$ [N/m] | $q_4$ [N/m] |
|---|---|---|---|---|
| Modello Analitico: *Semiguscio Puro* | | | | |
| 0.25 | −27.286 | 13.646 | 27.286 | 195.422 |
| 0.75 | −38.907 | 19.453 | 38.907 | 172.186 |
| 1.25 | −18.546 | 9.270 | 18.546 | −37.086 |
| Modello Analitico: *Trave a Semiguscio* | | | | |
| 0.25 | −66.670 | 33.330 | 66.670 | 116.670 |
| 0.75 | −66.670 | 33.330 | 66.670 | 116.670 |
| 1.25 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modelli Classici: EBBM, TBM | | | | |
| 0.25 | 0 | 6.339 | 0 | 6.339 |
| 0.75 | 0 | 6.339 | 0 | 6.339 |
| 1.25 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modello TE: $N = 3$ | | | | |
| 0.25 | −10.236 | 17.220 | 10.236 | 13.968 |
| 0.75 | −14.226 | 20.854 | 14.217 | 15.347 |
| 1.25 | −5.898 | 2.410 | 5.908 | −2.700 |
| Modello TE: $N = 5$ | | | | |
| 0.25 | −18.286 | 15.353 | 18.285 | 56.623 |
| 0.75 | −24.528 | 19.242 | 25.521 | 53.326 |
| 1.25 | −14.784 | 8.581 | 14.804 | −8.403 |
| Modello TE: $N = 7$ | | | | |
| 0.25 | −21.936 | 12.035 | 21.936 | 116.025 |
| 0.75 | −29.471 | 15.488 | 29.451 | 105.389 |
| 1.25 | −16.849 | 8.578 | 16.870 | −23.728 |
| Modello TE: $N = 9$ | | | | |
| 0.25 | −20.421 | 11.954 | 20.416 | 156.991 |
| 0.75 | −27.590 | 15.587 | 27.587 | 144.433 |
| 1.25 | −16.481 | 8.643 | 16.478 | −29.796 |
| Modello LE | | | | |
| 0.25 | −16.797 | 13.133 | 16.804 | 192.826 |
| 0.75 | −20.188 | 17.042 | 20.179 | 178.474 |
| 1.25 | −9.827 | 9.574 | 9.836 | −35.849 |

Tabella 6.3. Flussi medi nei pannelli.

| $y$ [m] | $P_1$ [N] | $P_2$ [N] | $P_3$ [N] | $P_4$ [N] |
|---|---|---|---|---|
| Modello Analitico: *Semiguscio Puro* | | | | |
| 0.00 | −63.554 | 63.554 | 122.892 | −122.892 |
| 0.50 | −43.088 | 43.088 | 38.824 | −38.824 |
| 1.00 | −13.908 | 13.908 | −27.816 | 27.816 |
| 1.50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modello Analitico: *Trave a Semiguscio* | | | | |
| 0.00 | −100 | 100 | 50 | −50 |
| 0.50 | −50 | 50 | 25 | −25 |
| 1.00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1.50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modelli Classici: EBBM, TBM | | | | |
| 0.00 | −66.846 | 66.846 | 33.423 | −33.423 |
| 0.50 | −33.409 | 33.409 | 16.705 | −16.705 |
| 1.00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1.50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modello TE: $N = 3$ | | | | |
| 0.00 | −43.823 | 43.818 | 75.780 | −75.785 |
| 0.50 | −29.821 | 29.835 | 24.224 | −24.206 |
| 1.00 | −10.550 | 10.732 | −20.187 | 21.152 |
| 1.50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modello TE: $N = 5$ | | | | |
| 0.00 | −46.843 | 46.844 | 96.165 | −96.163 |
| 0.50 | −26.391 | 26.397 | 28.232 | −28.221 |
| 1.00 | −9.674 | 9.632 | −22.620 | 23.506 |
| 1.50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modello TE: $N = 7$ | | | | |
| 0.00 | −45.845 | 45.837 | 98.686 | −98.684 |
| 0.50 | −25.720 | 25.728 | 29.695 | −29.684 |
| 1.00 | −8.646 | 8.613 | −22.654 | 23.937 |
| 1.50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modello TE: $N = 9$ | | | | |
| 0.00 | −45.189 | 45.191 | 103.504 | −103.503 |
| 0.50 | −25.688 | 25.696 | 30.855 | −30.817 |
| 1.00 | −8.563 | 8.526 | −24.512 | 26.242 |
| 1.50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modello LE | | | | |
| 0.00 | −45.650 | 45.654 | 102.481 | −102.478 |
| 0.50 | −25.668 | 25.681 | 32.594 | −32.594 |
| 1.00 | −8.285 | 8.310 | −22.735 | 23.600 |
| 1.50 | −0.429 | 0.504 | −1.163 | 0.699 |

Tabella 6.4. Forze nei correnti.

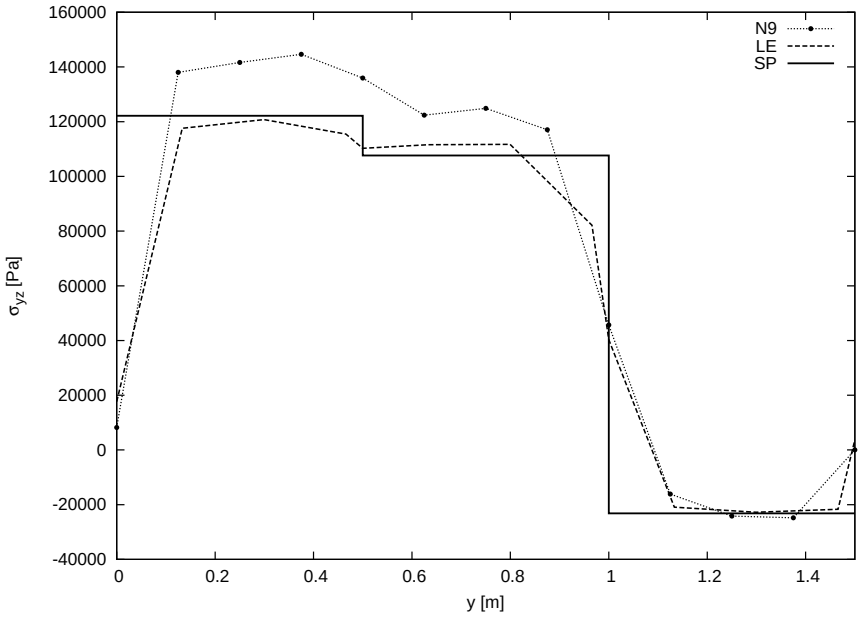



Figura 6.11. Andamento lungo $y$ delle tensioni tangenziali, $\sigma_{yz}$, sul *Pannello 4* in $x = b$, $z = 0$.

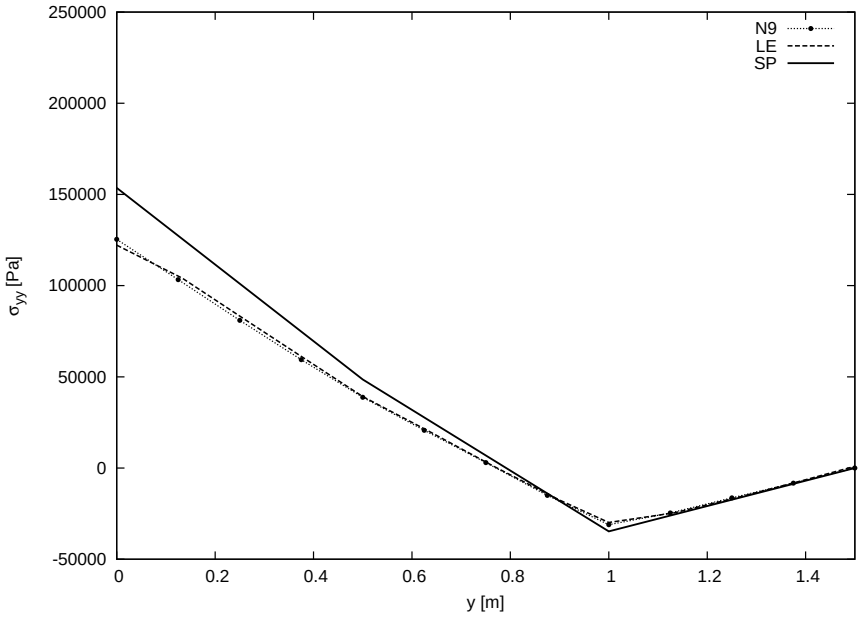



Figura 6.12. Andamento lungo $y$ delle tensioni assiali, $\sigma_{yy}$, sul *Corrente 3* in $x = b$, $z = -\frac{h_2}{2}$.

## 6.3 Rimozione delle Centine

Studiamo il comportamento della struttura in esame in assenza delle centine. Il tronco alare si presenta così come mostrato in Fig. 6.13.

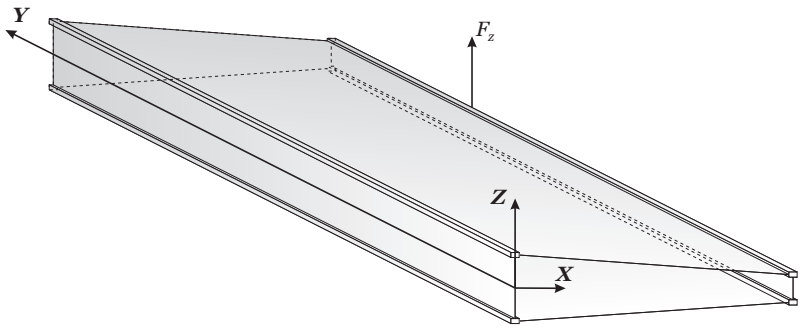



Figura 6.13. Tronco alare senza irrigidimenti trasversali.

I modelli CUF vengono implementati nel modo usuale, in particolare il modello LE presenta 8 elementi L9 sulla sezione trasversale. L'intera trave è composta da diciotto elementi B4.
La Fig. 6.14 mostra la condizione deformata secondo il modello TE di settimo ordine. Si nota subito il fenomeno descritto ampiamente nel Paragrafo 5.6.

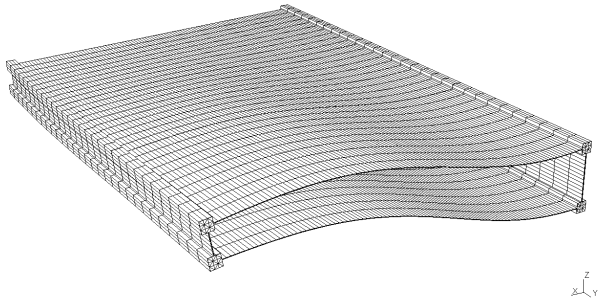


Figura 6.14. Deformata 3D del tronco alare. Modello TE di settimo ordine. Fattore di amplificazione $\times 3000$.

La Fig. 6.15 confronta la deformata del modello LE e TE di nono ordine della sezione caricata a $y = 2 \times l$. Il modello LE non riesce a cogliere correttamente il comportamento della struttura, essendo i *Pannelli 1* e *3* discretizzati con un unico elemento L9. Questo problema è facilmente superabile modellizzando questi pannelli con più elementi *Lagrange - type*. In ogni modo questa discrepanza nella deformata non comporta alcuna incongruenza nelle tensioni sollecitanti la struttura.
La Tabella 6.5 riporta lo spostamento del punto caricato e il numero dei gradi di

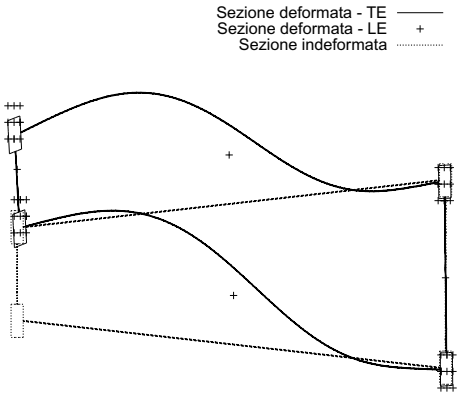


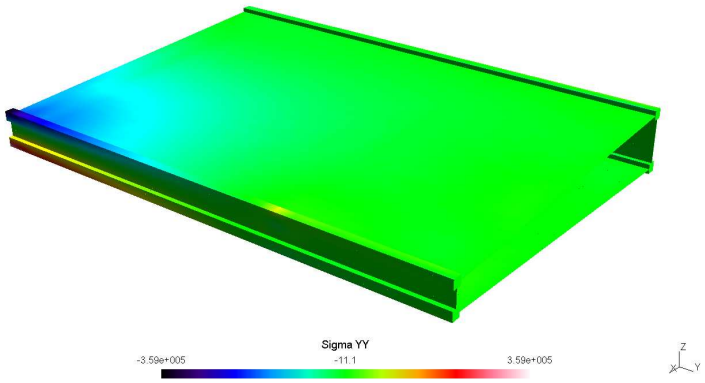

Figura 6.15. Condizione deformata e indeformata della sezione caricata a $y = 2 \times l$. Confronto tra il modello LE e il modello TE di nono ordine. Fattore di amplificazione $\times 3000$.

libertà dei modelli implementati.
La Fig. 6.16 mostra lo stato di tensione del tronco alare senza centine. In particolare si riporta l'andamento delle tensioni $\sigma_{yy}$ (Fig. 6.16a), $\sigma_{xy}$ (Fig. 6.16b) e $\sigma_{yz}$ (Fig. 6.16c).

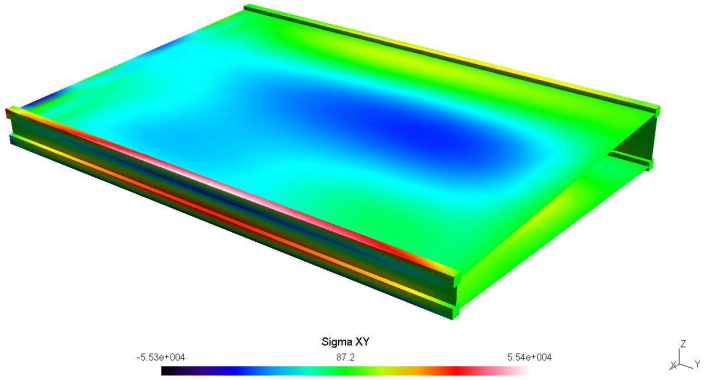
| | $u_z \times 10^5$ [m] | DOFs |
|---|---|---|
| | Modelli Classici | |
| EBBM | 0.464 | 495 |
| TBM | 0.477 | 495 |
| | Taylor | |
| $N = 3$ | 0.794 | 1650 |
| $N = 5$ | 1.203 | 3465 |
| $N = 7$ | 2.158 | 5940 |
| $N = 9$ | 2.649 | 9075 |
| | Lagrange | |
| 8 L9 | 2.981 | 10560 |

Tabella 6.5. $u_z$ del punto caricato e numero di gradi di libertà.

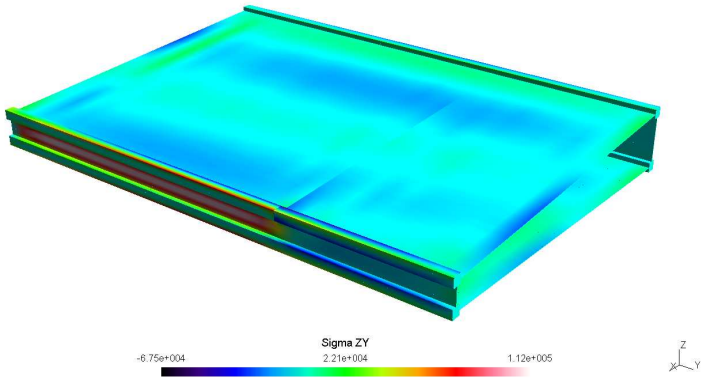
Le Tabelle 6.6 e 6.7 riassumono le risultanti di tensione sotto forma di forze assiali nei correnti e flussi medi nei pannelli. Vengono riportate nuovamente i risultati delle teorie basate sul *Semiguscio ideale*, sebbene queste vedono cadere una delle ipotesi fondamentali su cui si basano, ovvero la rigidezza infinita delle centine nel loro piano.
Infine le Fig. 6.17 e 6.18 mostrano l'andamento lungo $y$ delle tensioni assiali, $\sigma_{yy}$, nel *Corrente 3* e i flussi di taglio, $\sigma_{yz}$, in corrispondenza del *Pannello 4*, mentre le Fig. 6.19 e 6.20 confrontano il caso con e senza centine per i modelli LE.




(a)




(b)




(c)

Figura 6.16. Stato di tensione del tronco alare senza centine. Modello TE del settimo ordine.

| $y$ [m] | $q_1$ [N/m] | $q_2$ [N/m] | $q_3$ [N/m] | $q_4$ [N/m] |
|---|---|---|---|---|
| Modello Analitico: *Semiguscio Puro* | | | | |
| 0.25 | −27.286 | 13.646 | 27.286 | 195.422 |
| 0.75 | −38.907 | 19.453 | 38.907 | 172.186 |
| 1.25 | −18.546 | 9.270 | 18.546 | −37.086 |
| Modello Analitico: *Trave a Semiguscio* | | | | |
| 0.25 | −66.670 | 33.330 | 66.670 | 116.670 |
| 0.75 | −66.670 | 33.330 | 66.670 | 116.670 |
| 1.25 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modelli Classici: EBBM, TBM | | | | |
| 0.25 | 0 | 6.339 | 0 | 6.339 |
| 0.75 | 0 | 6.339 | 0 | 6.339 |
| 1.25 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modello TE: $N = 3$ | | | | |
| 0.25 | −10.313 | 17.248 | 10.313 | 13.944 |
| 0.75 | −14.256 | 20.861 | 14.248 | 15.285 |
| 1.25 | −6.041 | 2.517 | 6.050 | −2.797 |
| Modello TE: $N = 5$ | | | | |
| 0.25 | −20.390 | 15.522 | 20.390 | 55.280 |
| 0.75 | −25.481 | 17.413 | 25.476 | 54.072 |
| 1.25 | −14.399 | 7.362 | 14.404 | −7.293 |
| Modello TE: $N = 7$ | | | | |
| 0.25 | −8.366 | 2.541 | 8.365 | 139.422 |
| 0.75 | −11.500 | 2.161 | 11.494 | 137.654 |
| 1.25 | −9.318 | 1.027 | 9.325 | −7.027 |
| Modello TE: $N = 9$ | | | | |
| 0.25 | −4.719 | −4.663 | 4.527 | 207.984 |
| 0.75 | −7.423 | −21.170 | 7.591 | 83.279 |
| 1.25 | −8.322 | 4.982 | 8.237 | 44.969 |
| Modello LE | | | | |
| 0.25 | 10.062 | 0.012 | −10.063 | 242.399 |
| 0.75 | 19.157 | −0.046 | −19.149 | 243.059 |
| 1.25 | 18.910 | −0.045 | −18.913 | 0.698 |

Tabella 6.6. Flussi medi nei pannelli.

| $y$ [m] | $P_1$ [N] | $P_2$ [N] | $P_3$ [N] | $P_4$ [N] |
|---|---|---|---|---|
| Modello Analitico: *Semiguscio Puro* | | | | |
| 0.00 | −63.554 | 63.554 | 122.892 | −122.892 |
| 0.50 | −43.088 | 43.088 | 38.824 | −38.824 |
| 1.00 | −13.908 | 13.908 | −27.816 | 27.816 |
| 1.50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modello Analitico: *Trave a Semiguscio* | | | | |
| 0.00 | −100 | 100 | 50 | −50 |
| 0.50 | −50 | 50 | 25 | −25 |
| 1.00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1.50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modelli Classici: EBBM, TBM | | | | |
| 0.00 | −66.846 | 66.846 | 33.423 | −33.423 |
| 0.50 | −33.409 | 33.409 | 16.705 | −16.705 |
| 1.00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1.50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modello TE: $N = 3$ | | | | |
| 0.00 | −43.847 | 43.844 | 75.776 | −75.780 |
| 0.50 | −29.291 | 29.301 | 24.121 | −24.107 |
| 1.00 | −10.433 | 10.680 | −19.701 | 20.792 |
| 1.50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modello TE: $N = 5$ | | | | |
| 0.00 | −44.676 | 44.677 | 100.065 | −100.064 |
| 0.50 | −21.332 | 21.338 | 34.047 | −34.037 |
| 1.00 | −6.412 | 6.429 | −19.224 | 19.992 |
| 1.50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modello TE: $N = 7$ | | | | |
| 0.00 | −10.261 | 10.263 | 160.338 | −160.337 |
| 0.50 | −4.710 | 4.716 | 65.371 | −65.358 |
| 1.00 | −1.615 | 1.819 | −12.639 | 13.867 |
| 1.50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modello TE: $N = 9$ | | | | |
| 0.00 | 9.873 | −9.869 | 193.116 | −193.199 |
| 0.50 | −0.274 | 0.277 | 13.991 | −13.658 |
| 1.00 | −13.731 | −13.888 | 28.783 | −27.032 |
| 1.50 | 0.271 | 0.266 | 0.009 | −0.021 |
| Modello LE | | | | |
| 0.00 | 12.777 | −12.774 | 205.063 | −205.060 |
| 0.50 | 9.707 | −9.699 | 94.778 | −94.767 |
| 1.00 | −4.130 | −4.150 | −0.870 | 1.557 |
| 1.50 | −0.395 | 0.393 | 0.400 | −0.404 |

Tabella 6.7. Forze nei correnti.

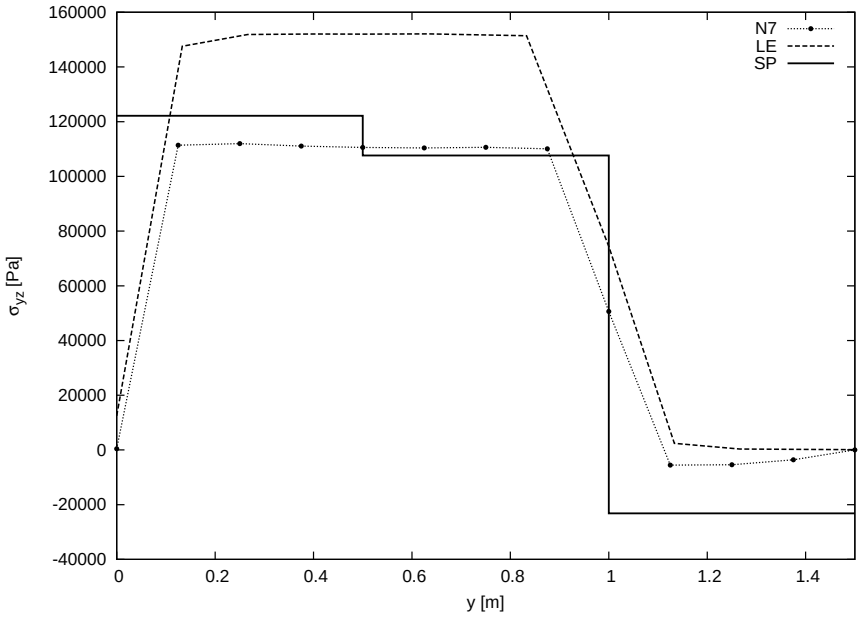



Figura 6.17. Andamento lungo $y$ delle tensioni tangenziali, $\sigma_{yz}$, sul *Pannello 4* in $x = b$, $z = 0$. Modello senza centine.

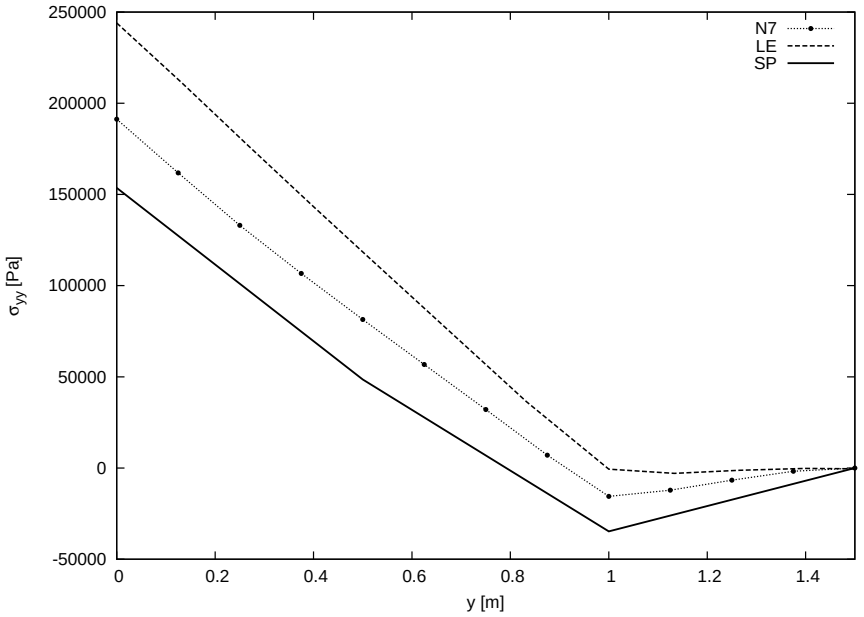



Figura 6.18. Andamento lungo $y$ delle tensioni assiali, $\sigma_{yy}$, sul *Corrente 3* in $x = b$, $z = -\frac{h_2}{2}$. Modello senza centine.

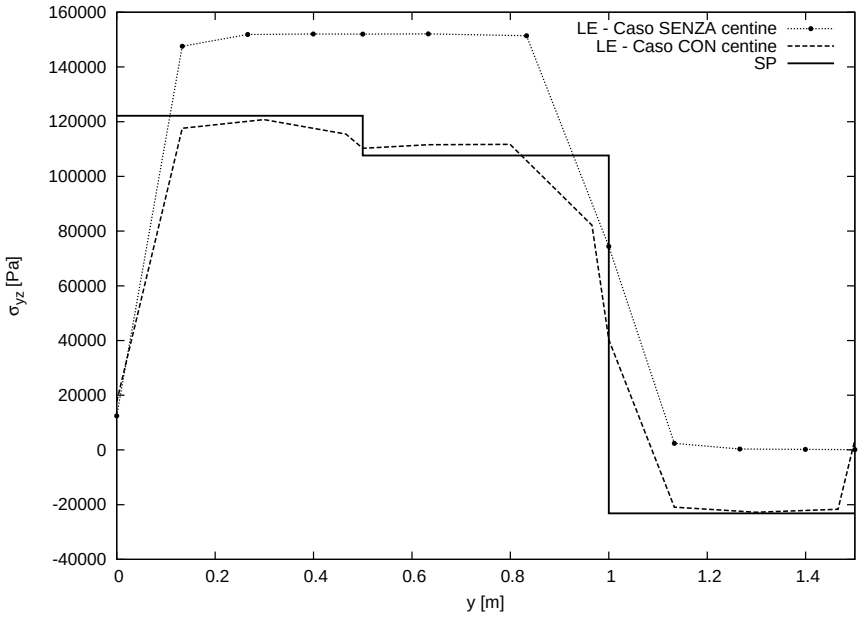



Figura 6.19. Andamento lungo $y$ delle tensioni tangenziali, $\sigma_{yz}$, sul *Pannello 4* in $x = b$, $z = 0$. Confronto tra il tronco alare con e senza centine. Modelli LE.

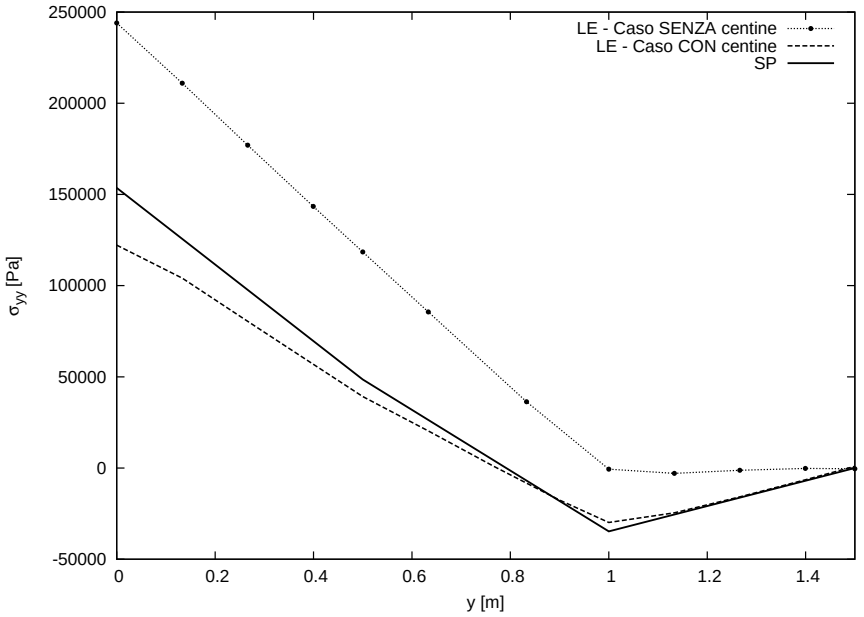



Figura 6.20. Andamento lungo $y$ delle tensioni assiali, $\sigma_{yy}$, sul *Corrente 3* in $x = b$, $z = -\frac{h_2}{2}$. Confronto tra il tronco alare con e senza centine. Modelli LE.

## 6.4 Effetto di una Apertura

Riprendiamo il tronco alare in esame così come studiato nel Paragrafo 6.2, ovvero provvisto di centine. Alla configurazione geometrica di Fig. 6.1a, rimuoviamo il *Pannello 3* del *Cassone B*. Il tronco si presenta come in Fig. 6.21.

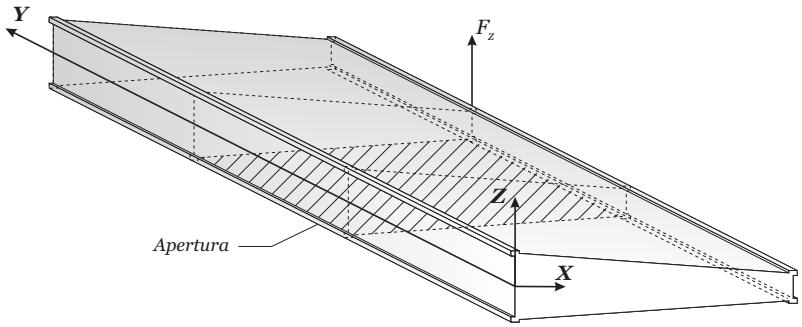



Figura 6.21. Tronco alare con apertura sul ventre.

La Fig. 6.22 mostra la deformata 3D della struttura secondo la soluzione TE di quinto ordine.

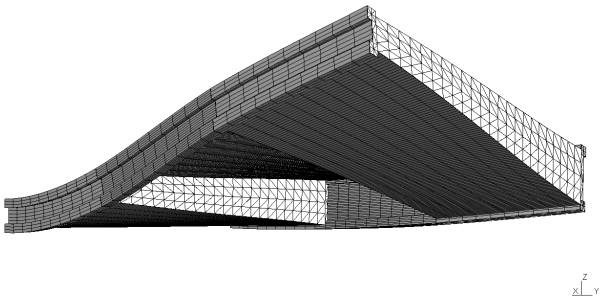


Figura 6.22. Deformata 3D del tronco alare. Modello TE di quinto ordine. Fattore di amplificazione $\times 20000$.

La Fig. 6.23 confronta la deformata del modello LE e TE di settimo ordine della sezione posta a $1.5 \times l$.
La Tabella 6.8 riassume lo spostamento $u_z$ del punto caricato e il numero dei gradi di libertà coinvolto nel calcolo per i vari modelli implementati.
La Fig. 6.24 mostra lo stato di tensione del tronco alare nella configurazione considerata. Nella figura viene riportato l'andamento delle tensioni $\sigma_{yy}$ (Fig. 6.24a), $\sigma_{xy}$ (Fig. 6.24b) e $\sigma_{yz}$ (Fig. 6.24c).
Le Tabelle 6.9 e 6.10 riassumono lo stato di tensione della struttura in termini di flussi medi nei pannelli e forze nei correnti. Per confronto in queste tabelle vengono

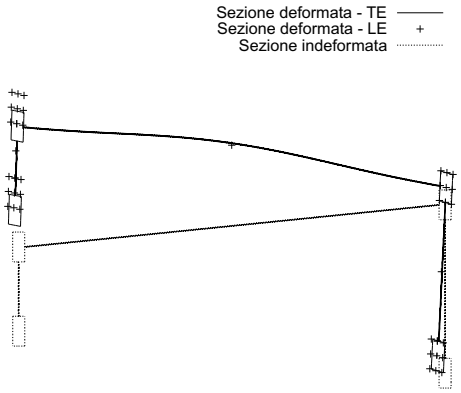
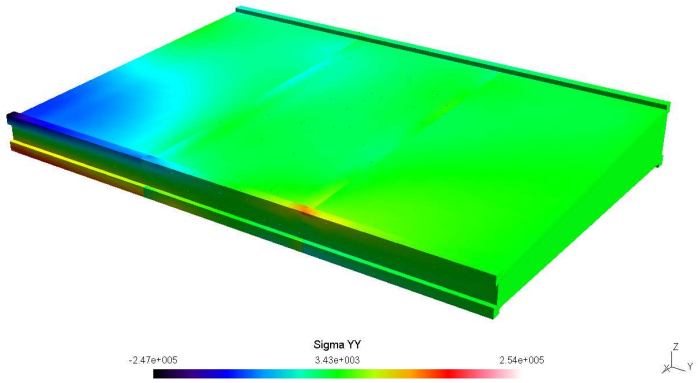



Figura 6.23. Condizione deformata e indeformata della sezione a $y = 1.5\times l$. Confronto tra il modello LE e il modello TE di settimo ordine. Fattore di amplificazione $\times 10000$.

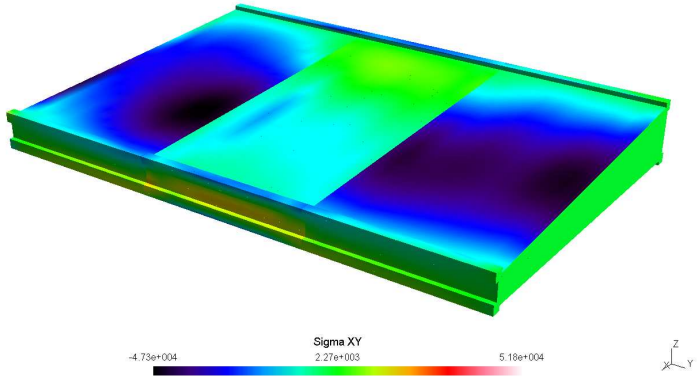
| | $u_z \times 10^5$ [m] | DOFs |
|---|---|---|
| | Modelli Classici | |
| EBBM | 0.476 | 495 |
| TBM | 0.491 | 495 |
| | Taylor | |
| $N = 3$ | 0.873 | 1650 |
| $N = 5$ | 1.500 | 3465 |
| $N = 7$ | 1.745 | 5940 |
| $N = 9$ | 1.836 | 9075 |
| | Lagrange | |
| 8 L9 | 1.919 | 10446 |

Tabella 6.8. $u_z$ del punto caricato e numero di gradi di libertà.

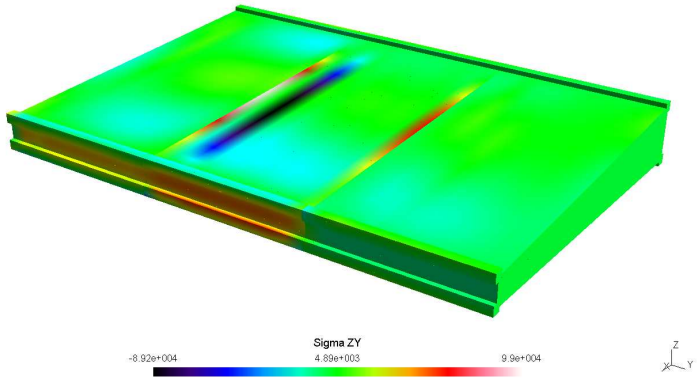
riportati nuovamente i risultati di analisi analitiche; queste si rifanno ancora al caso del tronco alare con centine e senza apertura.
Dai risultati si osserva una diminuzione del flusso $q_1$ nel cassone intermedio, accompagnato da un aumento del flusso sul *Pannello 4*. Inoltre si nota un generale aumento dei carichi sul cassone d'estremità. Risultano chiare le difficoltà di tale struttura di resistere a torsione.
Per concludere, nelle Fig. 6.25 e 6.26 vengono diagrammati gli andamenti delle tensioni assiali, $\sigma_{yy}$, e tangenziali , $\sigma_{yz}$, nei punti intermedi, rispettivamente, del *Corrente 3* e del *Pannello 4*.
Le Fig. 6.27 e 6.28 mostrano, invece, le differenze tra i risultati del modello con e senza apertura. Nel tracciare questi ultimi grafici si sono utilizzati i risultati derivanti da analisi del modello LE, data la sua estrema affidabilità.




(a)




(b)




(c)

Figura 6.24. Stato di tensione del tronco alare con apertura sul ventre. Modello TE del quinto ordine.

| $y$ [m] | $q_1$ [N/m] | $q_2$ [N/m] | $q_3$ [N/m] | $q_4$ [N/m] |
|---|---|---|---|---|
| Modello Analitico: *Semiguscio Puro* | | | | |
| 0.25 | −27.286 | 13.646 | 27.286 | 195.422 |
| 0.75 | −38.907 | 19.453 | 38.907 | 172.186 |
| 1.25 | −18.546 | 9.270 | 18.546 | −37.086 |
| Modello Analitico: *Trave a Semiguscio* | | | | |
| 0.25 | −66.670 | 33.330 | 66.670 | 116.670 |
| 0.75 | −66.670 | 33.330 | 66.670 | 116.670 |
| 1.25 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modelli Classici: EBBM, TBM | | | | |
| 0.25 | 0 | 6.339 | 0 | 6.339 |
| 0.75 | 0 | 7.493 | - | 7.493 |
| 1.25 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modello TE: $N = 3$ | | | | |
| 0.25 | −9.819 | 17.042 | 11.547 | 13.555 |
| 0.75 | −3.697 | 20.085 | - | 17.385 |
| 1.25 | −6.523 | 2.939 | 7.566 | −3.053 |
| Modello TE: $N = 5$ | | | | |
| 0.25 | −21.631 | 16.769 | 22.377 | 55.356 |
| 0.75 | −2.036 | 7.298 | - | 66.870 |
| 1.25 | −22.556 | 14.089 | 22.966 | −13.735 |
| Modello TE: $N = 7$ | | | | |
| 0.25 | −25.947 | 14.178 | 26.778 | 109.491 |
| 0.75 | −0.358 | 4.357 | - | 143.835 |
| 1.25 | −26.821 | 13.496 | 27.573 | −39.225 |
| Modello TE: $N = 9$ | | | | |
| 0.25 | −28.474 | 16.290 | 25.409 | 154.169 |
| 0.75 | −2.433 | 95.011 | - | 163.263 |
| 1.25 | −26.187 | 15.062 | 27.814 | −45.268 |
| Modello LE | | | | |
| 0.25 | −19.747 | 15.342 | 18.843 | 185.201 |
| 0.75 | 17.200 | 2.336 | - | 236.610 |
| 1.25 | −20.235 | 15.226 | 20.299 | −56.979 |

Tabella 6.9. Flussi medi nei pannelli.

| $y$ [m] | $P_1$ [N] | $P_2$ [N] | $P_3$ [N] | $P_4$ [N] |
|---|---|---|---|---|
| Modello Analitico: *Semiguscio Puro* | | | | |
| 0.00 | −63.554 | 63.554 | 122.892 | −122.892 |
| 0.50 | −43.088 | 43.088 | 38.824 | −38.824 |
| 1.00 | −13.908 | 13.908 | −27.816 | 27.816 |
| 1.50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modello Analitico: *Trave a Semiguscio* | | | | |
| 0.00 | −100 | 100 | 50 | −50 |
| 0.50 | −50 | 50 | 25 | −25 |
| 1.00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1.50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modelli Classici: EBBM, TBM | | | | |
| 0.00 | −66.846 | 66.846 | 33.423 | −33.423 |
| 0.50 | −34.633 | 46.697 | 25.374 | −15.291 |
| 1.00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1.50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modello TE: $N = 3$ | | | | |
| 0.00 | −42.090 | 43.230 | 78.098 | −77.127 |
| 0.50 | −29.210 | 37.056 | 43.038 | −37.244 |
| 1.00 | −11.140 | 11.956 | −22.832 | 27.327 |
| 1.50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modello TE: $N = 5$ | | | | |
| 0.00 | −37.429 | 41.350 | 113.940 | −110.280 |
| 0.50 | −15.811 | 25.076 | 67.060 | −54.128 |
| 1.00 | −17.639 | 18.700 | −36.664 | 41.997 |
| 1.50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modello TE: $N = 7$ | | | | |
| 0.00 | −35.336 | 40.569 | 121.763 | −116.226 |
| 0.50 | −15.920 | 24.052 | 71.894 | −61.022 |
| 1.00 | −16.362 | 18.954 | −36.533 | 40.692 |
| 1.50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modello TE: $N = 9$ | | | | |
| 0.00 | −26.671 | 42.374 | 86.901 | −159.767 |
| 0.50 | −4.973 | 6.256 | 89.305 | −94.695 |
| 1.00 | −11.403 | 16.240 | −38.574 | 41.987 |
| 1.50 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Modello LE | | | | |
| 0.00 | −33.976 | 39.934 | 128.625 | −122.214 |
| 0.50 | −11.808 | 20.367 | 82.081 | −60.684 |
| 1.00 | −14.639 | 15.626 | −29.005 | 39.449 |
| 1.50 | −0.588 | 0.400 | −2.459 | 1.984 |

Tabella 6.10. Forze nei correnti.

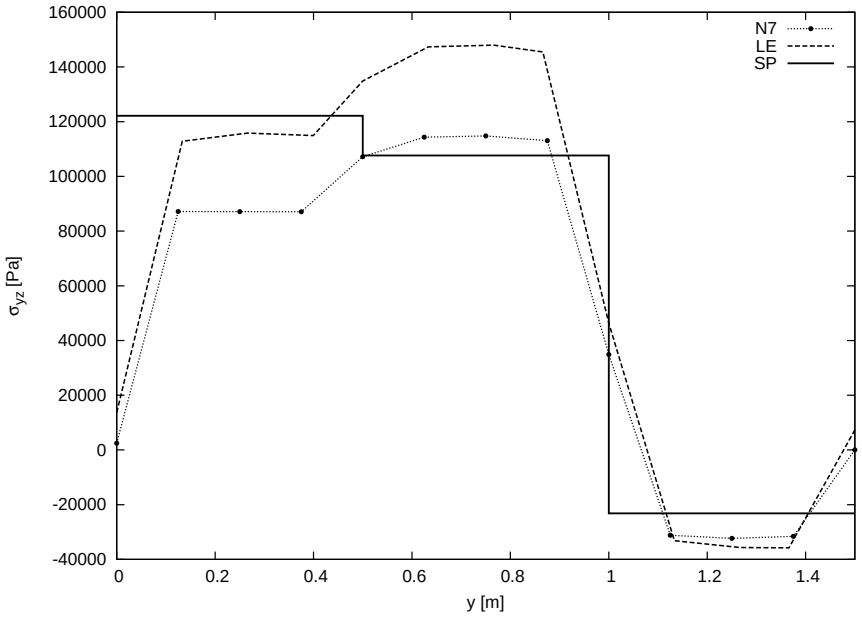



Figura 6.25. Andamento lungo $y$ delle tensioni tangenziali, $\sigma_{yz}$, sul *Pannello 4* in $x = b$, $z = 0$. Modello con apertura.

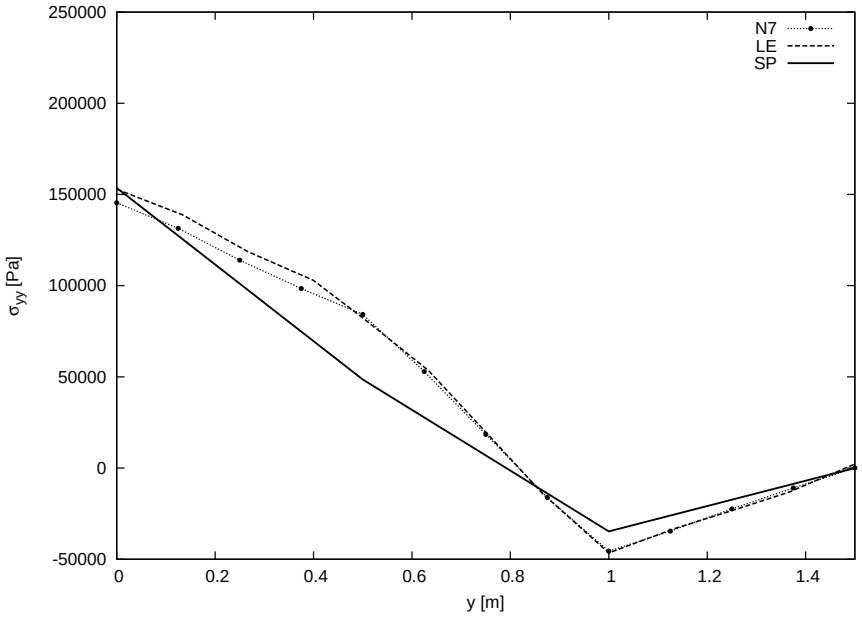



Figura 6.26. Andamento lungo $y$ delle tensioni assiali, $\sigma_{yy}$, sul *Corrente 3* in $x = b$, $z = -\frac{h_2}{2}$. Modello con apertura.

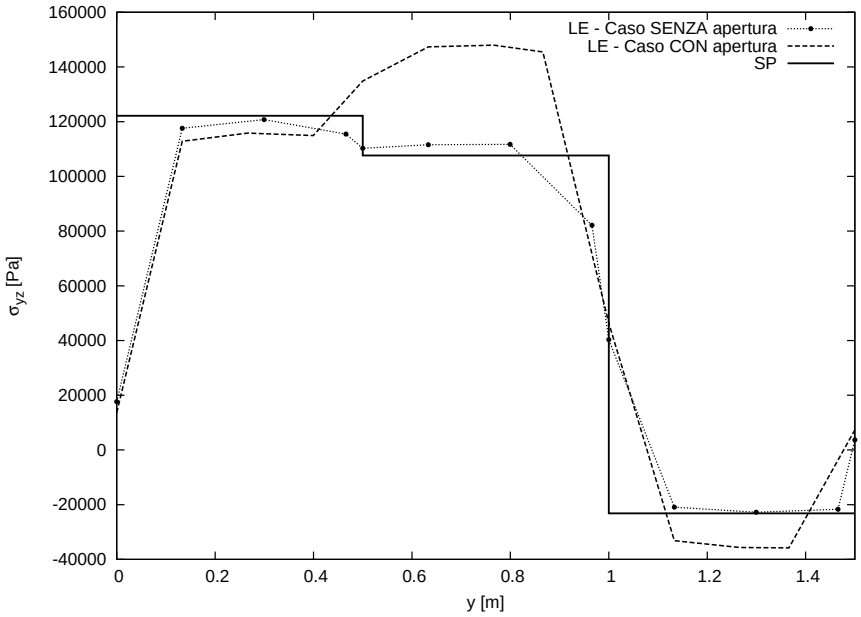



Figura 6.27. Andamento lungo $y$ delle tensioni tangenziali, $\sigma_{yz}$, sul *Pannello 4* in $x = b$, $z = 0$. Confronto tra il tronco alare con e senza apertura. Modelli LE.

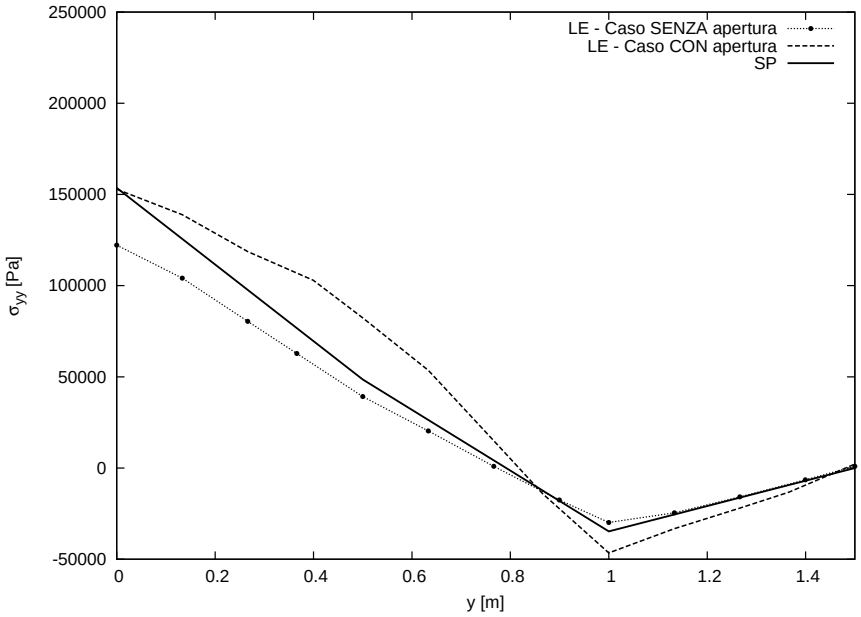



Figura 6.28. Andamento lungo $y$ delle tensioni assiali, $\sigma_{yy}$, sul *Corrente 3* in $x = b$, $z = -\frac{h_2}{2}$. Confronto tra il tronco alare con e senza apertura. Modelli LE.

# Capitolo 7

# Analisi Modale

In questo capitolo analizzeremo le frequenze proprie e i modi di vibrare delle strutture finora prese in esame. Dai risultati emergerà, ancora una volta, l'estrema affidabilità dei modelli basati su espansioni polinomiali tipo *Lagrange*. Questi infatti, anche per quanto riguarda l'analisi modale, restituiranno valori molto prossimi ai modelli analizzati tramite NASTRAN©, cogliendo forme modali proprie di strutture a parete sottile. Viceversa, vedremo che i modelli TE colgono in maniera corretta solo i modi di tipo flessionale e torsionale, mentre i modi di tipo locale cominceranno a comparire solo per elevati ordini di espansione della teoria.

## 7.1 Longherone a Tre Correnti

Riprendiamo la struttura di Fig. 7.1.

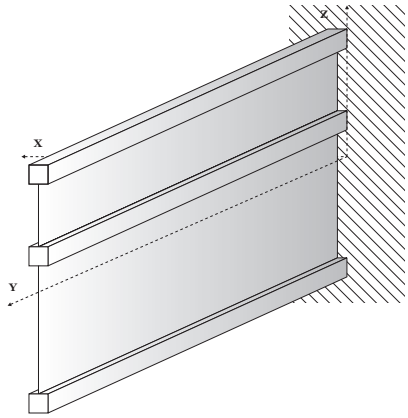



Figura 7.1. Cassone a tre correnti e due pannelli.

Questa presenta le stesse caratteristiche geometriche e i stessi vincoli della trave già

analizzata nel Paragrafo 5.5. Il materiale cui è composto il cassone presenta una massa volumica pari a $\rho = 2.7 \times 10^3$ $[Kg/m^3]$.
La Tabella 7.1 riassume, oltre al numero dei gradi di libertà, le prime 20 frequenze proprie per i vari modelli implementati. Risulta immediatamente chiaro come, aumentando l'ordine della formulazione trave, si riescano a trovare sempre più modi di vibrare della struttura.
Sempre dalla Tabella 7.1 si nota come ci siano molti modi che sfuggono ad una analisi tramite modelli TE. Come vedremo questi modi sono tipicamente *modi shell*, ovvero vibrazioni locali che interessano i soli pannelli del longherone. Al contrario il modello LE restituisce risultati analoghi a quelli derivanti da un analisi di un modello NASTRAN© a elementi solidi. Si noti come pervengano in modo corretto tutte le prime 15 frequenze proprie.

| | EBBM | TBM | N1 | N2 | N3 | N4 | 5 L9 | SOLID |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DOFs | 279 | 279 | 279 | 558 | 930 | 1395 | 3813 | 72450 |
| *Modo* 1 | 3.24 | 3.24 | 3.24 | 3.43 | 3.35 | 3.31 | 3.46 | 3.15 |
| *Modo* 2 | 20.29 | 20.28 | 20.28 | 16.70 | 16.34 | 16.13 | 3.52 | 3.55 |
| *Modo* 3 | 56.81 | 56.74 | 56.74 | 21.39 | 20.97 | 20.75 | 3.76 | 3.82 |
| *Modo* 4 | 111.36 | 108.81 | 108.81 | 55.25 | 52.90 | 51.70 | 14.27 | 13.34 |
| *Modo* 5 | 117.60 | 111.11 | 111.11 | 60.11 | 59.23 | 58.24 | 16.73 | 15.06 |
| *Modo* 6 | 184.30 | 183.57 | 183.57 | 108.19 | 100.81 | 97.87 | 17.67 | 16.51 |
| *Modo* 7 | 275.94 | 274.23 | 269.29 | 109.44 | 105.55 | 102.26 | 21.17 | 20.13 |
| *Modo* 8 | 386.89 | 383.36 | 274.23 | 117.79 | 116.61 | 113.20 | 21.71 | 21.48 |
| *Modo* 9 | 439.21 | 439.20 | 383.36 | 181.03 | 165.23 | 119.39 | 22.95 | 22.81 |
| *Modo* 10 | 517.91 | 455.17 | 439.20 | 194.59 | 183.16 | 161.07 | 25.11 | 24.33 |
| *Modo* 11 | 622.84 | 511.36 | 455.17 | 276.03 | 197.98 | 176.65 | 25.73 | 24.85 |
| *Modo* 12 | 669.05 | 658.20 | 511.36 | 290.25 | 229.97 | 189.01 | 31.21 | 30.38 |
| *Modo* 13 | 830.95 | 817.28 | 658.20 | 325.69 | 248.76 | 243.58 | 37.92 | 37.15 |
| *Modo* 14 | 1104.56 | 972.68 | 807.88 | 393.92 | 290.54 | 258.64 | 45.79 | 45.03 |
| *Modo* 15 | 1317.62 | 1055.78 | 817.28 | 406.78 | 302.06 | 281.59 | 54.86 | 51.68 |
| *Modo* 16 | 1332.62 | 1268.39 | 972.68 | 442.24 | 352.21 | 345.64 | 57.96 | 54.03 |
| *Modo* 17 | 1455.52 | 1317.60 | 1055.78 | 453.98 | 393.00 | 354.36 | 63.33 | 54.35 |
| *Modo* 18 | 1613.04 | 1391.05 | 1268.39 | 534.94 | 404.91 | 392.02 | 64.82 | 56.21 |
| *Modo* 19 | 1943.61 | 1521.63 | 1317.60 | 542.21 | 414.91 | 393.63 | 65.10 | 58.37 |
| *Modo* 20 | 2331.17 | 1734.78 | 1346.47 | 697.35 | 441.62 | 441.04 | 77.02 | 59.04 |

Tabella 7.1. Numero dei gradi di libertà e prime 20 frequenze proprie del longherone secondo i vari modelli implementati. Valori in [Hz].

In Fig. 7.2 sono diagrammate le posizioni delle prime quattro frequenze flessionali, evidenziate dalla linea continua. Nuovi modi compaiono rifinendo il modello trave.

In particolare, tra i modi flessionali, vengono trovati modi torsionali e, per i modelli LE e SOLID, locali.

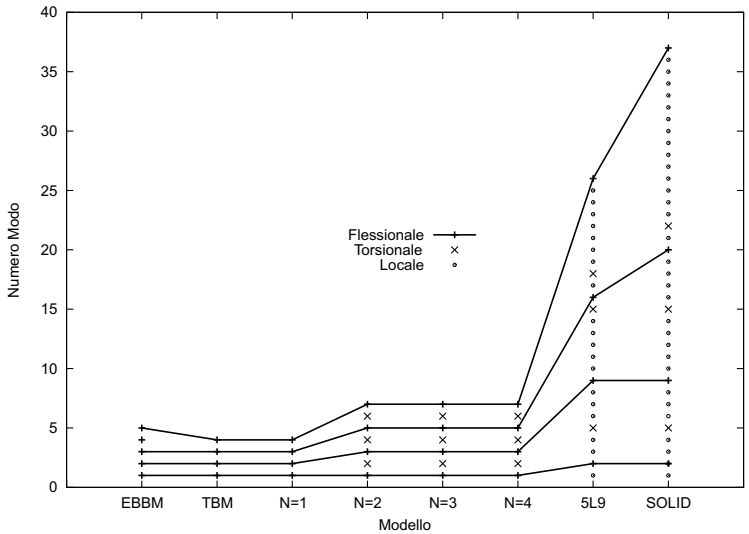



Figura 7.2. Confronto tra modelli implementati e frequenze e modi di vibrare del longherone.

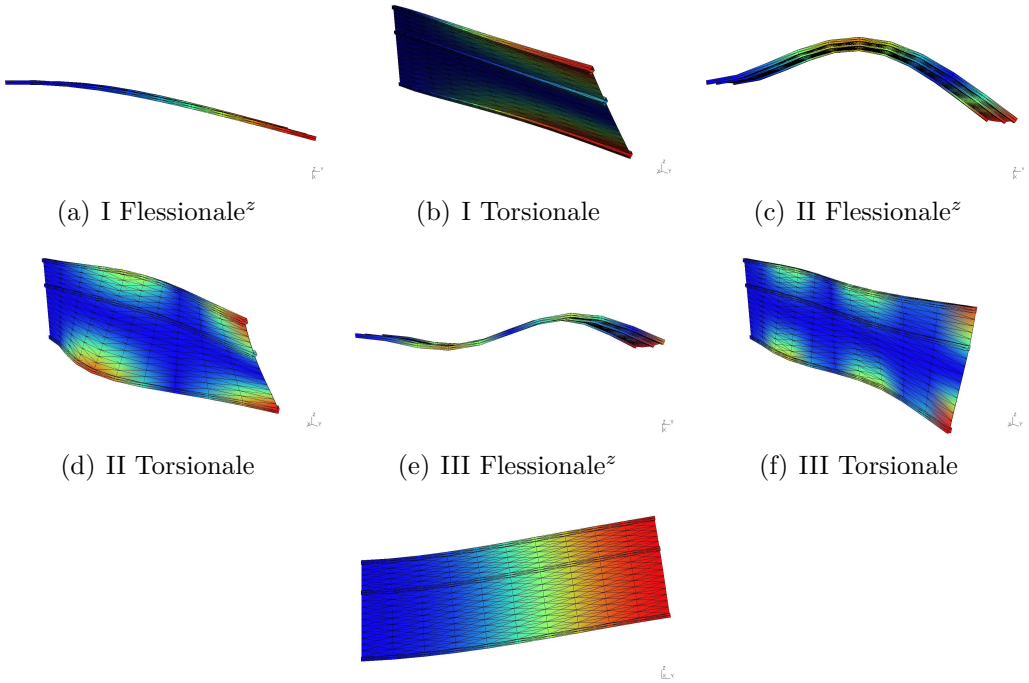
In Tabella 7.2 vengono riportate le frequenze naturali dei principali modi di vibrare della struttura. In parentesi compare la posizione della frequenza naturale nel vettore degli autovalori.

| EBBM | TBM | N1 | N2 | N3 | N4 | 5 L9 | SOLID |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | I Flessionale lungo $z$ | | | | |
| $3.24^{(1)}$ | $3.24^{(1)}$ | $3.24^{(1)}$ | $3.43^{(1)}$ | $3.35^{(1)}$ | $3.31^{(1)}$ | $3.52^{(2)}$ | $3.55^{(2)}$ |
| | | | I Torsionale | | | | |
| - | - | - | $16.70^{(2)}$ | $16.34^{(2)}$ | $16.13^{(2)}$ | $16.73^{(5)}$ | $15.06^{(5)}$ |
| | | | II Flessionale lungo $z$ | | | | |
| $20.29^{(2)}$ | $20.28^{(2)}$ | $20.28^{(2)}$ | $21.39^{(3)}$ | $20.97^{(3)}$ | $20.75^{(3)}$ | $22.95^{(9)}$ | $22.81^{(9)}$ |
| | | | II Torsionale | | | | |
| - | - | - | 55.25(4) | 52.90(4) | 51.70(4) | 54.86(15) | 51.68(15) |
| | | | III Flessionale lungo $z$ | | | | |
| $56.81^{(3)}$ | $56.74^{(3)}$ | $56.74^{(3)}$ | $60.11^{(5)}$ | $59.23^{(5)}$ | $58.24^{(5)}$ | $57.96^{(16)}$ | $59.04^{(20)}$ |
| | | | III Torsionale | | | | |
| - | - | - | $108.19^{(6)}$ | $100.81^{(6)}$ | $97.87^{(6)}$ | $64.82^{(18)}$ | $63.96^{(22)}$ |
| | | | I Flessionale lungo $x$ | | | | |
| $117.60^{(5)}$ | $108.81^{(4)}$ | $108.81^{(4)}$ | $109.44^{(7)}$ | $105.55^{(7)}$ | $102.26^{(7)}$ | $94.75^{(26)}$ | $94.48^{(37)}$ |

Tabella 7.2. Principali modi di vibrare della struttura a due pannelli allineati. Frequenze proprie per vari modelli. Valori in [Hz].

Questi modi vengono mostrati in Fig. 7.3, secondo i risultati del modello TE di

quarto ordine.
La Fig. 7.4 mostra, invece, alcuni esempi di modi locali che si trovano tramite l'analisi LE del longherone a tre correnti.

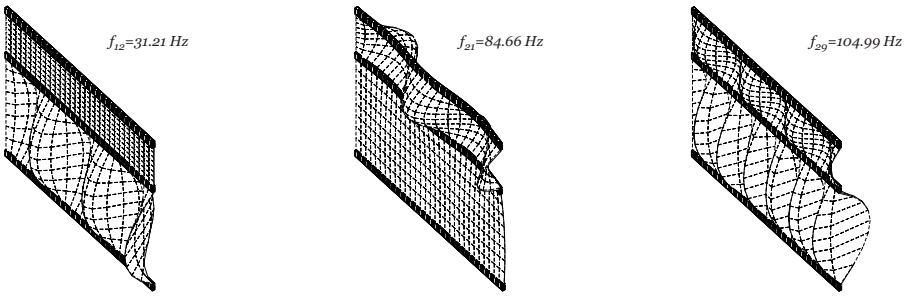


(a) I Flessionale$^z$ (b) I Torsionale (c) II Flessionale$^z$

(d) II Torsionale (e) III Flessionale$^z$ (f) III Torsionale

(g) I Flessionale$^x$

Figura 7.3. Principali modi di vibrare del longherone. Modello TE di quarto ordine.




(a) Modo 12 (b) Modo 21 (c) Modo 29

Figura 7.4. Esempi di modi locali. Modello LE.

## 7.2 Cassone Rettangolare senza Centina

Conderiamo il cassone rettangolare, riportato nuovamente in Fig. 7.5.

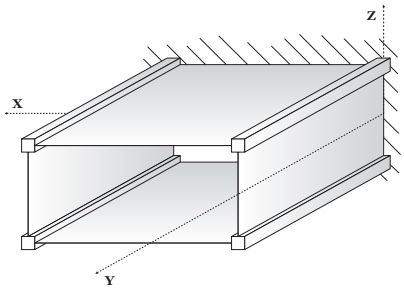



Figura 7.5. Cassone a quattro correnti e quattro pannelli.

L'analisi statica di questa struttura aveva evidenziato le sue difficoltà a mantenere inalterata la sezione trasversale quando soggetta a flesso-torsione.
La Tabella 7.3 riporta i primi nove modi di vibrare principali che interessano la trave e il numero dei gradi di libertà coinvolto nel calcolo per ogni modello implementato. In parentesi viene indicata la posizione che ciascuna frequenza propria assume nel vettore degli autovalori.
In quanto segue viene indicato col nome di *"modo Flessional-Differenziale"* una particolare forma modale responsabile delle anomalie al funzionamento della struttura dovute alla mancanza della centina. Questo modo di vibrare, mostrato in Fig. 7.6, comporta una flessione dei due longheroni attorno l'asse $x$ in due versi opposti.
Dal confronto con il modello NASTRAN© a elementi solidi risulta chiaro che per individuare correttamente i modi flessional-differenziali abbiamo bisogno di un analisi *LE-based*, o di un ordine di espansione della teoria TE almeno del settimo. A questa conclusione ci aveva portato correttamente anche l'analisi statica della struttura.

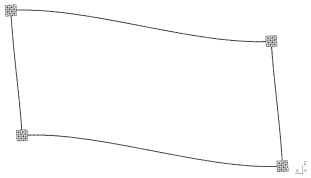


Figura 7.6. *"Modo flessional-differenziale"*. Sezione trasversale del cassone rettangolare. Modello TE di quinto ordine.

La Fig. 7.7 mostra in che ordine compaiono i nove modi di vibrare principali nel vettore degli autovettori. I modelli classici e i modelli TE prevedono, in modo errato, che il modo flessionale attorno l'asse $x$ è il primo dei nove a comparire. I modelli LE e SOLID dicono, invece, che è proprio il primo modo flessional-differenziale a

presentarsi a frequenze più basse.

| EBBM | TBM | N1 | N3 | N5 | N7 | 8 L9 | SOLID |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | DOFs | | | |
| 279 | 279 | 279 | 930 | 1953 | 2376 | 4800 | 68304 |
| | | | | I Flessional-Differenziale | | | |
| - | - | - | - | $333.85^{(6)}$ | $63.49^{(3)}$ | $56.49^{(33)}$ | $57.97^{(57)}$ |
| | | | | I Flessionale lungo $x$ | | | |
| $70.57^{(1)}$ | $68.46^{(1)}$ | $68.46^{(1)}$ | $62.51^{(1)}$ | $61.37^{(1)}$ | $60.39^{(2)}$ | $69.99^{(38)}$ | $71.62^{(72)}$ |
| | | | | I Flessionale lungo $z$ | | | |
| $133.09^{(2)}$ | $120.85^{(2)}$ | $120.85^{(2)}$ | $107.72^{(2)}$ | $105.22^{(2)}$ | $105.01^{(5)}$ | $111.20^{(53)}$ | $109.20^{(109)}$ |
| | | | | I Torsionale | | | |
| - | - | $269.29^{(3)}$ | $224.50^{(3)}$ | $135.80^{(3)}$ | $166.67^{(8)}$ | $153.53^{(60)}$ | $160.02^{(176)}$ |
| | | | | II Flessional-Differenziale | | | |
| - | - | - | - | $563.15^{(12)}$ | $245.23^{(13)}$ | $247.45^{(77)}$ | $259.89^{(281)}$ |
| | | | | II Flessionale lungo $x$ | | | |
| $413.46^{(3)}$ | $352.05^{(3)}$ | $352.05^{(4)}$ | $249.46^{(4)}$ | $241.79^{(5)}$ | $203.04^{(10)}$ | $267.03^{(78)}$ | $268.96^{(295)}$ |
| | | | | II Flessionale lungo $z$ | | | |
| $678.40^{(5)}$ | $473.87^{(5)}$ | $473.87^{(6)}$ | $369.43^{(5)}$ | $352.84^{(7)}$ | $337.13^{(19)}$ | $364.14^{(14)}$ | $366.14^{(415)}$ |
| | | | | II Torsionale | | | |
| - | - | $807.88^{(7)}$ | $640.92^{(7)}$ | $392.63^{(8)}$ | $431.92^{(28)}$ | $364.14^{(83)}$ | $409.20^{(459)}$ |
| | | | | I Longitudinale | | | |
| $439.21^{(4)}$ | $439.20^{(4)}$ | $439.20^{(5)}$ | $441.04^{(6)}$ | $440.13^{(9)}$ | $440.41^{(29)}$ | $440.49^{(88)}$ | $437.63^{(498)}$ |

Tabella 7.3. Numero dei gradi di libertà e principali modi di vibrare della struttura rettangolare. Frequenze proprie per vari modelli. Valori in [Hz].

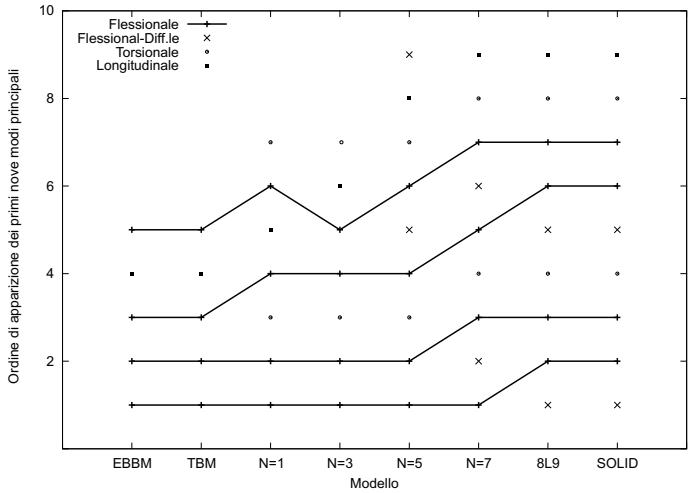
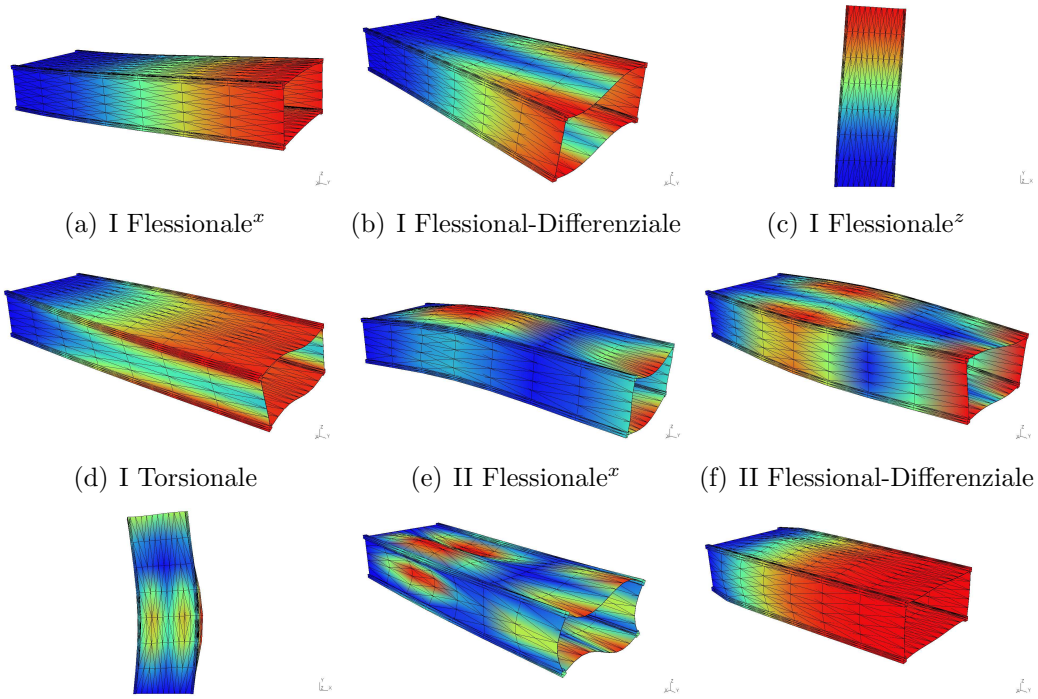



Figura 7.7. Confronto tra modelli implementati e frequenze e modi di vibrare. Cassone rettangolare.

Inoltre, ancora una volta, i modelli LE dimostrano la propria superiorità individuando correttamente le vibrazioni locali dei singoli pannelli. A titolo di esempio in

Fig. 7.12 vengono riportati alcuni modi che riguardano i pannelli superiore e inferiore della struttura.
Infine, in Fig. 7.8 vengono mostrati tutti i modi analizzati, calcolati tramite il modello TE di settimo ordine.

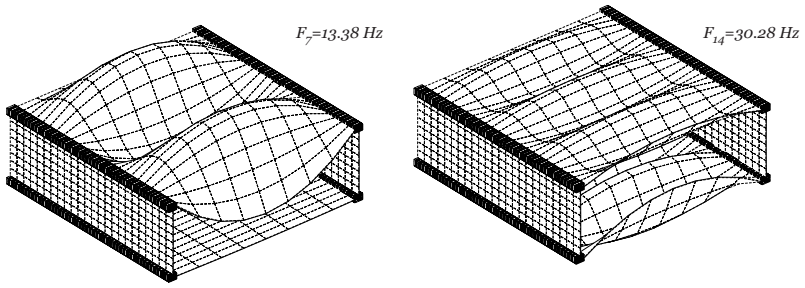


(a) I Flessionale$^x$ (b) I Flessional-Differenziale (c) I Flessionale$^z$

(d) I Torsionale (e) II Flessionale$^x$ (f) II Flessional-Differenziale

(g) II Flessionale$^z$ (h) II Torsionale (i) I Longitudinale

Figura 7.8. Principali modi di vibrare del cassone rettangolare. Modello TE di settimo ordine.




(a) Modo 7 (b) Modo 14

Figura 7.9. Esempi di modi locali. Modello LE.

## 7.3 Cassone Rettangolare con Centina al *tip*

Consideriamo l'irrigidimento trasversale avere uno spessore, $s$, pari a 2 [mm]. L'analisi statica ha mostrato come l'implementazione della centina mostrata in Fig. 7.10 porti il cassone a lavorare nel modo opportuno.

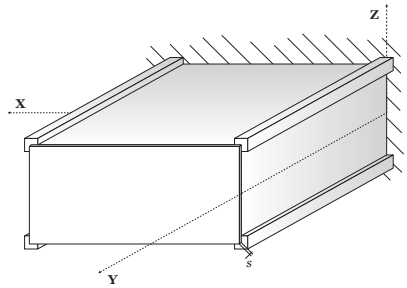



Figura 7.10. Cassone rettangolare con centina.

In Tabella 7.4 sono riassunte le frequenze naturali dei principali modi di vibrare della struttura in esame, insieme al numero dei gradi di libertà per i vari modelli analizzati. In parentesi viene indicata la posizione che la frequenza in esame assume

| EBBM | TBM | N1 | N3 | N5 | LE | SOLID |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | DOFs | | | |
| 306 | 306 | 306 | 1020 | 2142 | 4860 | 115362 |
| | | | I Flessionale lungo $x$ | | | |
| $67.33^{(1)}$ | $65.40^{(1)}$ | $65.40^{(1)}$ | $59.92^{(1)}$ | $58.86^{(1)}$ | $65.39^{(33)}$ | $64.70^{(59)}$ |
| | | | I Flessionale lungo $z$ | | | |
| $127.24^{(2)}$ | $115.89^{(2)}$ | $115.89^{(2)}$ | $103.64^{(2)}$ | $101.32^{(2)}$ | $105.90^{(45)}$ | $105.57^{(102)}$ |
| | | | I Torsionale | | | |
| - | - | $266.53^{(3)}$ | $223.61^{(3)}$ | $138.18^{(3)}$ | $125.05^{(50)}$ | $131.69^{(135)}$ |
| | | | I Flessional-Differenziale | | | |
| - | - | - | - | $467.04^{(9)}$ | $210.36^{(61)}$ | $211.86^{(223)}$ |
| | | | II Flessionale lungo $x$ | | | |
| $397.94^{(3)}$ | $340.15^{(3)}$ | $340.15^{(4)}$ | $241.95^{(4)}$ | $234.51^{(4)}$ | $257.20^{(64)}$ | $257.37^{(274)}$ |
| | | | II Flessionale lungo $z$ | | | |
| $659.39^{(5)}$ | $462.28^{(5)}$ | $462.28^{(6)}$ | $360.01^{(5)}$ | $344.10^{(6)}$ | $351.95^{(69)}$ | $356.85^{(406)}$ |
| | | | II Torsionale | | | |
| - | - | $799.60^{(8)}$ | $640.92^{(7)}$ | $366.34^{(7)}$ | $369.10^{(72)}$ | $379.20^{(430)}$ |
| | | | II Flessional-Differenziale | | | |
| - | - | - | - | $736.17^{(16)}$ | $509.52^{(79)}$ | $406.51^{(462)}$ |
| | | | I Longitudinale | | | |
| $428.48^{(4)}$ | $428.48^{(4)}$ | $428.48^{(5)}$ | $429.89^{(6)}$ | $417.80^{(8)}$ | $437.23^{(73)}$ | $437.75^{(504)}$ |

Tabella 7.4. Numero dei gradi di libertà e principali modi di vibrare della struttura rettangolare con centina. Frequenze proprie per vari modelli. Valori in [Hz].

nel vettore degli autovalori.
La prima cosa che si nota è sicuramente lo spostamento dei modi flessional-differenziali verso frequenze più elevate rispetto al caso senza centina.
In Fig. 7.11 viene tracciato l'ordine con cui compaiono i primi nove modi principali analizzati.

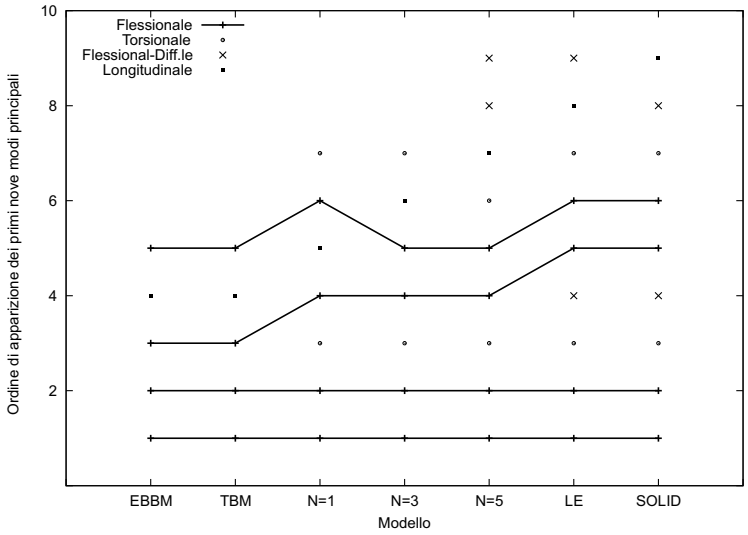
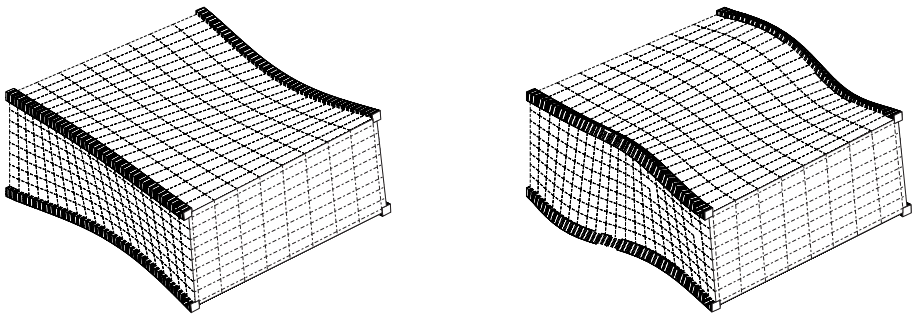


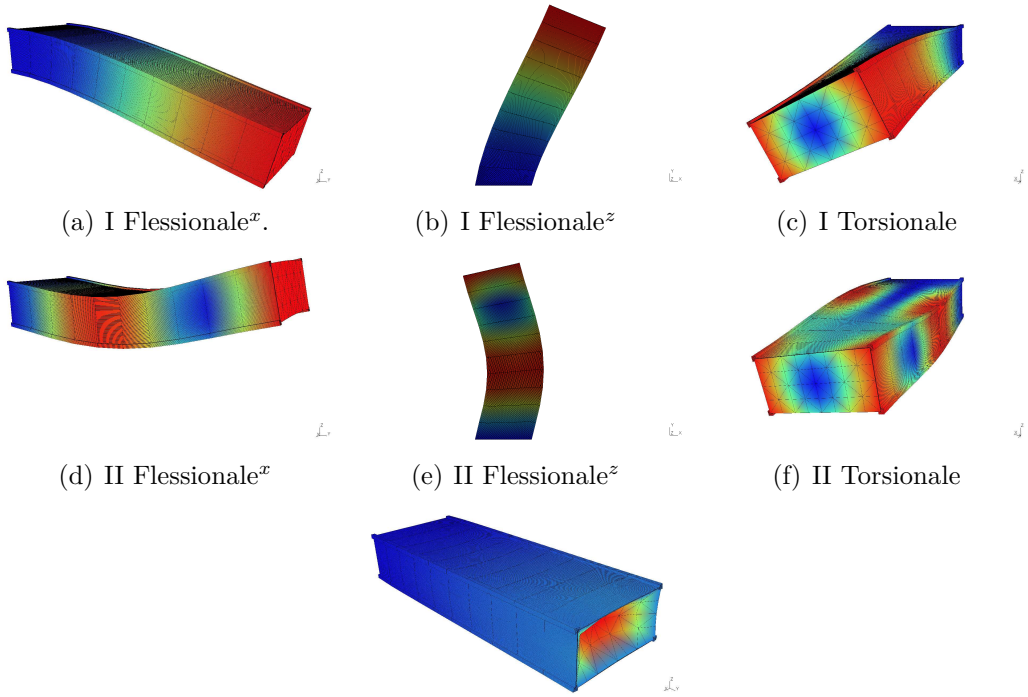

Figura 7.11. Confronto tra modelli implementati e frequenze e modi di vibrare del cassone rettangolare con centina.

La Fig. 7.12 mostra i primi due modi flessional-differenziali secondo il modello *Lagrange Expansion - based*, mentre la Fig. 7.13 riporta i restanti modi, analizzati mediante il modello TE di quinto ordine.



(a) I Flessional-Differenziale (b) II Flessional-Differenziale

Figura 7.12. Modi di vibrare flessional-differenziali. Modello LE.



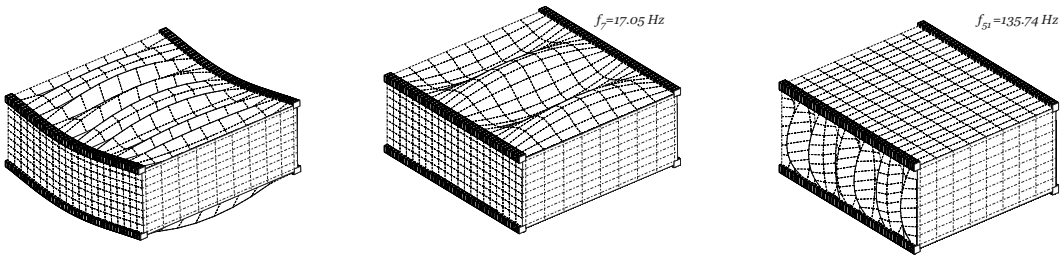
(a) I Flessionale$^x$. (b) I Flessionale$^z$ (c) I Torsionale

(d) II Flessionale$^x$ (e) II Flessionale$^z$ (f) II Torsionale

(g) I Longitudinale

Figura 7.13. Modi di vibrare flessionali, torsionali e longitudinale. Modello TE di quinto ordine.

La Fig. 7.14 mostra come in realtà anche i modi principali siano affetti da vibrazioni locali dei pannelli. A titolo di esempio si riporta il secondo modo flessionale attorno l'asse $x$. Sempre in Fig. 7.14 vengono riportati anche alcuni modi locali.




(a) II Flessionale$^x$ (b) Modo 7 (c) Modo 51

Figura 7.14. Secondo modo di vibrare flessionale lungo $x$ e modi locali dei pannelli. Modello LE.

Infine i grafici riportati in Fig. 7.15 mostrano l'andamento, al variare del modello strutturale, delle frequenze naturali per i modi propri di vibrare flessionali, torsionali e flessional-differenziali, sia per il caso del cassone senza centina sia per il caso del cassone con centina al *tip*.
Dal confronto emerge come i modi flessionali e torsionali vengano influenzati in modo del tutto ininfluente dall'implementazione dell'irrigidimento trasversale. Al contrario i modi flessional-differenziali vedono le corrispondenti frequenze naturali aumentare in modo considerevole, dal momento che la rigidezze del cassone nel piano trasversale aumenta per via della centina.

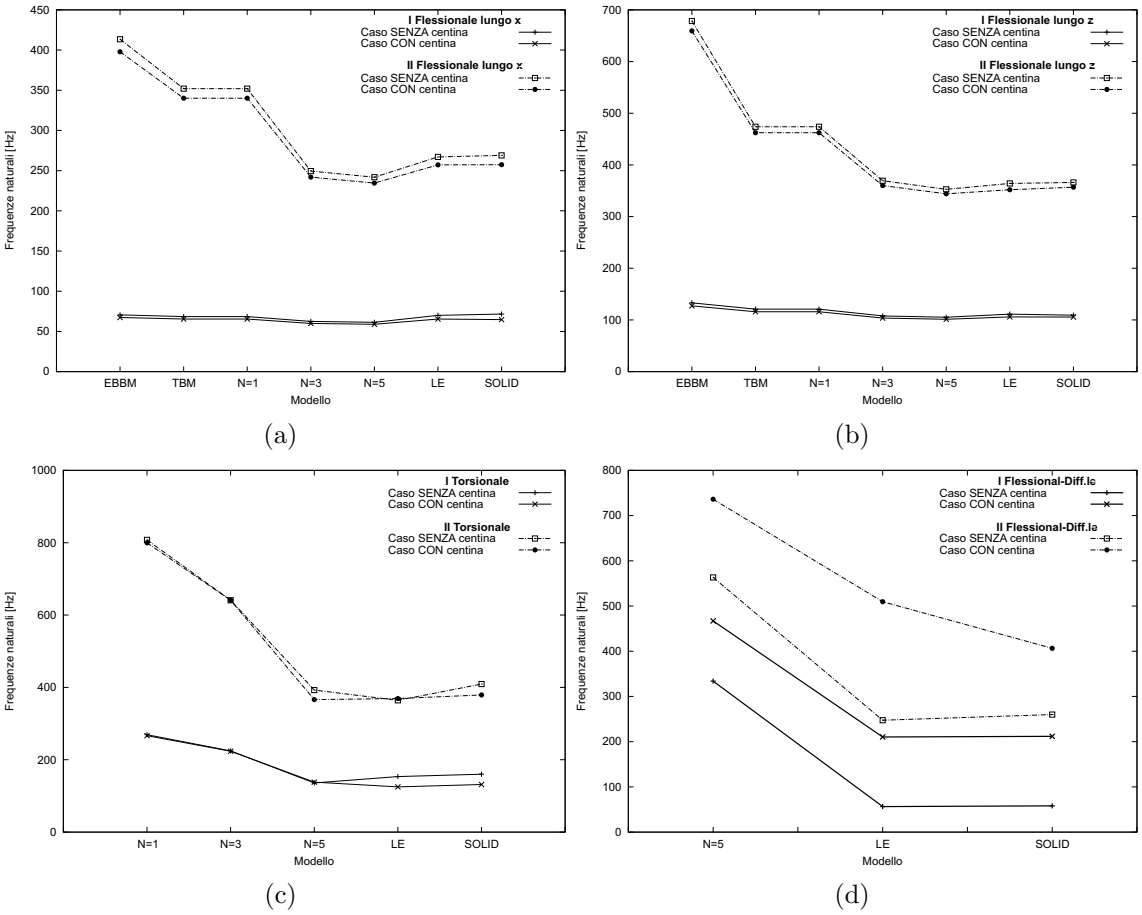



Figura 7.15. Confronto tra il cassone rettangolare con e senza centina al *tip*. Frequenze naturali dei principali modi di vibrare al variare del modello.

La Fig. 7.15 mostra anche l'ottima corrispondenza dei risultati tra il modello LE e il modello NASTRAN© a elementi solidi. Viceversa, i modelli TE, sebbene riescano a prevedere correttamente i modi flessionali e torsionali, trovano difficoltà nel modellizzare correttamente i modi flessional-differenziali.

Appurata la dipendenza del solo modo differenziale dalla centina, si indaga sull'effetto che il suo spessore ha sulle frequenze naturali di tali modi di vibrare.
In Fig.7.16 vengono diagrammate le frequenze naturali dei primi due modi di vibrare flessional-differenziali secondo il modello LE.

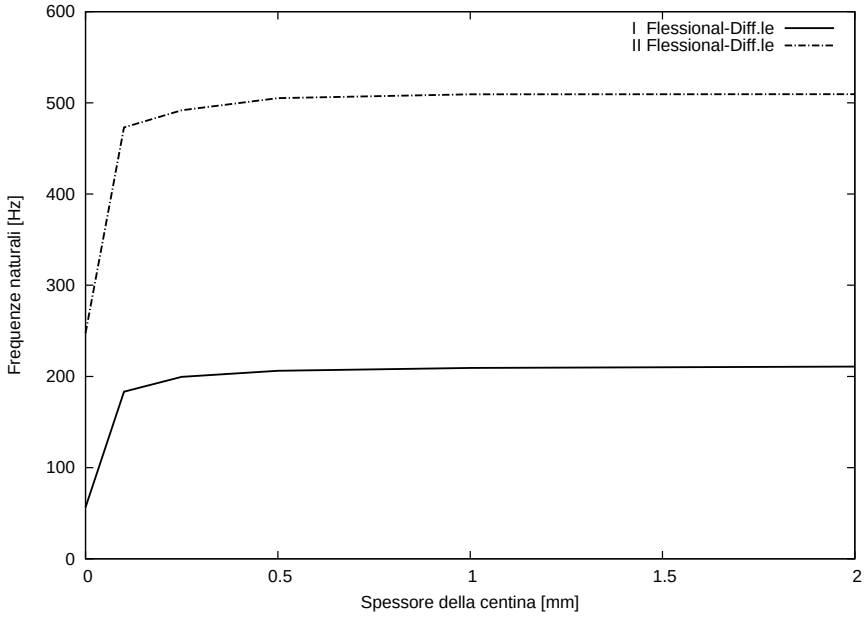



Figura 7.16. Andamento delle frequenze naturali dei primi due modi flessional-differenziali al variare dello spessore della centina al *tip* del cassone rettangolare. Modello LE.

Da questa analisi si osserva come dopo i 0.5 [mm] le frequenze si attestino ad un valore circa costante.

## 7.4 Tronco Alare

L'ultima e più complessa struttura di cui vengono studiate le vibrazioni è il tronco alare analizzato staticamente a flesso-torsione nel Capitolo 6. In Fig. 7.17 viene riproposta la sua configurazione geometrica.
In Tabella 7.5 sono riportate le frequenza dei principali modi di vibrare, insieme al numero dei gradi di libertà dei vari modelli implementati. In parentesi viene mostrata la posizione che la frequenza in esame assume nel vettore degli autovalori.
Tra le prime frequenze scompare il modo flessional-differenziale, mentre viene alla luce un comportamento di *Flessione Combinata* della struttura. Ciò è dovuto principalmente alle centine presenti nel tronco alare, che rendono molto rigida la sezione trasversale, e all'elevato rapporto *corda/spessore* del profilo.

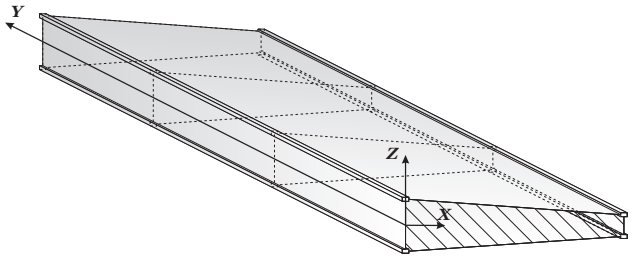



Figura 7.17. Tronco alare.

| EBBM | TBM | N1 | N3 | N5 | LE |
|---|---|---|---|---|---|
| | | DOFs | | | |
| 495 | 495 | 495 | 1650 | 2331 | 4935 |
| | | I Flessionale lungo $x$ | | | |
| $76.77^{(1)}$ | $76.05^{(1)}$ | $76.05^{(1)}$ | $73.27^{(1)}$ | $67.67^{(1)}$ | $69.96^{(13)}$ |
| | | I Torsionale | | | |
| - | - | $542.26^{(4)}$ | $166.94^{(2)}$ | $132.01^{(2)}$ | $115.45^{(15)}$ |
| | | I Flessionale lungo $z$ | | | |
| $469.75^{(3)}$ | $370.65^{(2)}$ | $370.65^{(2)}$ | $287.56^{(3)}$ | $272.67^{(3)}$ | $289.18^{(26)}$ |
| | | II Flessionale lungo $x$ | | | |
| $468.96^{(2)}$ | $442.00^{(3)}$ | $442.00^{(2)}$ | $356.48^{(4)}$ | $303.25^{(4)}$ | $335.53^{(31)}$ |
| | | I di Flessione Combinata | | | |
| - | - | - | - | $502.47^{(6)}$ | $346.50^{(33)}$ |
| | | II Torsionale | | | |
| - | - | $1626.70^{(8)}$ | $540.47^{(5)}$ | $444.58^{(5)}$ | $419.03^{(35)}$ |
| | | II di Flessione Combinata | | | |
| - | - | - | - | $702.27^{(8)}$ | $618.09^{(42)}$ |
| | | II Flessionale lungo $z$ | | | |
| $1836.01^{(6)}$ | $994.65^{(5)}$ | $994.64^{(6)}$ | $817.70^{(6)}$ | $758.06^{(9)}$ | $743.19^{(44)}$ |
| | | I Longitudinale | | | |
| $845.23^{(4)}$ | $845.21^{(4)}$ | $845.21^{(5)}$ | $845.50^{(7)}$ | $837.17^{(11)}$ | $837.28^{(49)}$ |

Tabella 7.5. Numero dei gradi di libertà e principali modi di vibrare del tronco alare con centine. Frequenze proprie per vari modelli. Valori in [Hz].

In Fig. 7.18 vengono diagrammate le posizione dei primi nove modi al variare del modello implementato.
La Fig. 7.19 mostra, invece, i principali modi di vibrare analizzati del tronco secondo il modello TE di quinto ordine, mentra in Fig. 7.20 si riportano alcuni esempi di modi *shell* che interessano pannelli e anime dei longheroni. Questi modi locali vengono correttamente previsti esclusivamente dal modello *Lagrange Expansion - based*.

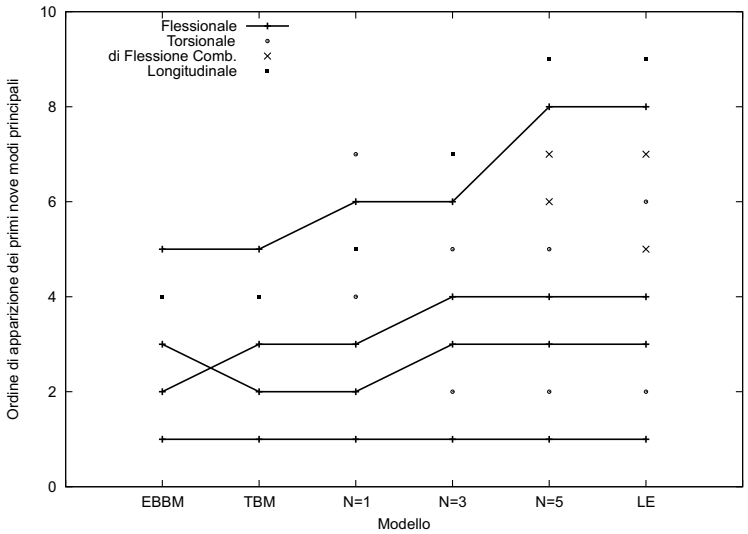
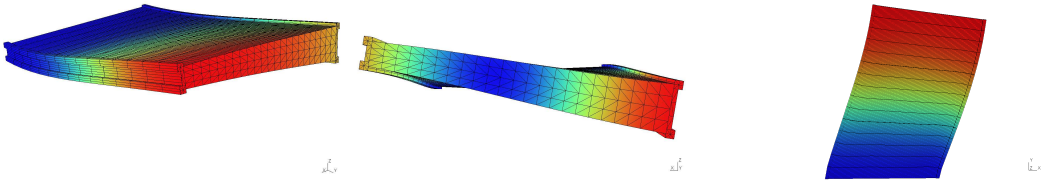
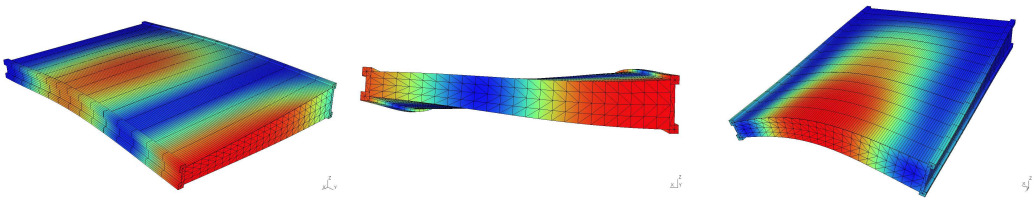


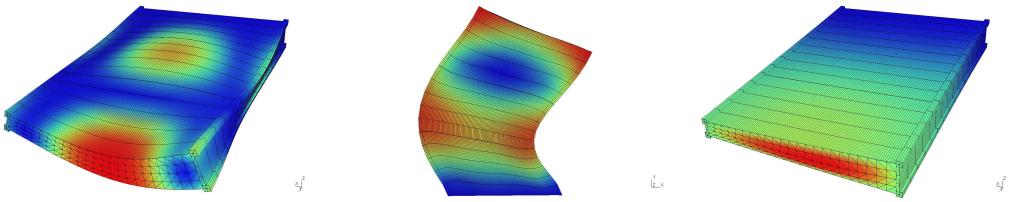

Figura 7.18. Confronto tra modelli implementati e frequenze e modi di vibrare del tronco alare.



(a) I Flessionale$^x$. (b) I Torsionale (c) I Flessionale$^z$

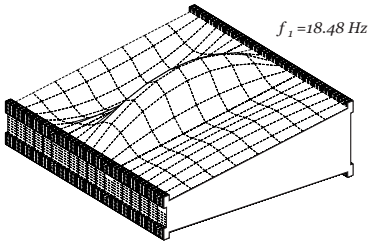


(d) II Flessionale$^x$ (e) II Torsionale (f) I di Fless. Combinata

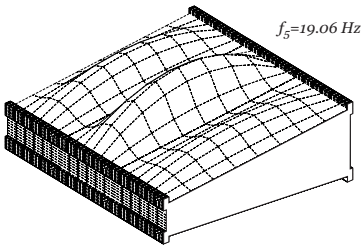


(g) II di Fless. Combinata (h) II Flessionale$^z$ (i) I Longitudinale

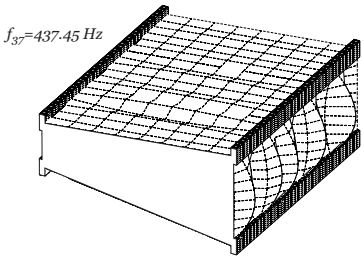
Figura 7.19. Principali modi di vibrare del tronco alare. Modello TE di quinto ordine.




(a) Modo 1




(b) Modo 5




(c) Modo 37

Figura 7.20. Esempi di modi *shell*. Modello LE.

## 7.5 Tronco Alare senza Centine

Dovrebbe essere ormai chiaro che l'assenza delle centine all'interno di un cassone a guscio rinforzato fa sì che il comportamento della struttura si allontani molto da quanto descritto dai modelli trave. Come ultima conferma si consideri nuovamente la struttura di Fig. 7.21.

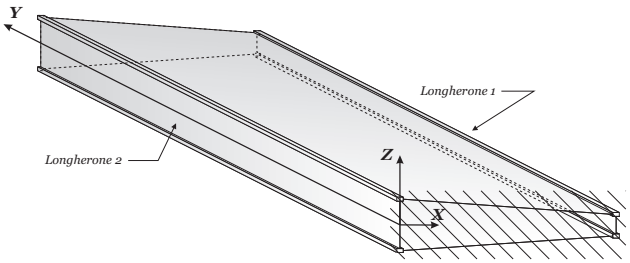



Figura 7.21. Tronco alare senza centine.

Ci aspetteremmo risultati simili a quelli visti per l'analisi modale del cassone rettangolare senza centina. Questo era caratterizzato in realtà, a differenza della struttura

presa qui in esame, da un basso rapporto *larghezza/altezza* della sezione trasversale e dall'avere i due longheroni uguali. In quel caso si notava la comparsa di modi flessional-differenziali a basse frequenze naturali. Per il tronco alare, come vedremo, questo comportamento viene descritto dalla comparsa di modi flessionali lungo l'asse $x$ che interessano o esclusivamente il *Longherone 1* o esclusivamente il *Longherone 2* (la notazione si rifà alla Fig. 7.21).
Come però si nota dalla Tabella 7.6, che riporta i princali modi di vibrare della struttura per i vari modelli, questo comportamento viene previsto correttamente solo dal modello LE. I modelli TE prevedono un unico modo flessionale lungo $x$ che interessa entrambi i longheroni.
In Tabella 7.6 vengono riportati anche il numero dei gradi di libertà sia dei modelli TE che dei modelli *component-wise*, mentre in parentesi compare l'ordine di apparizione del corrispondente modo di vibrare nel vettore degli autovettori [1].

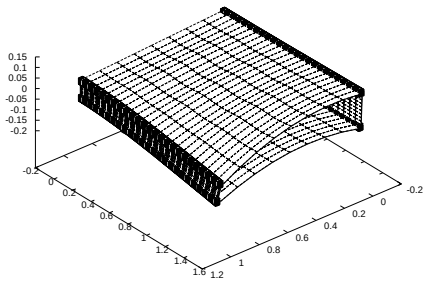
| EBBM | TBM | N1 | N3 | N5 |
|---|---|---|---|---|
| | | DOFs | | |
| 495 | 495 | 495 | 1650 | 2331 |
| | | I Flessionale lungo $x$ | | |
| $79.23^{(1)}$ | $78.48^{(1)}$ | $78.48^{(1)}$ | $75.45^{(1)}$ | $68.06^{(1)}$ |
| | | I Torsionale | | |
| - | - | $547.50^{(4)}$ | $167.89^{(2)}$ | $121.14^{(2)}$ |
| | | I Flessionale lungo $z$ | | |
| $481.88^{(2)}$ | $380.47^{(2)}$ | $380.47^{(2)}$ | $294.97^{(3)}$ | $279.45^{(3)}$ |
| | | II Flessionale lungo $x$ | | |
| $485.36^{(3)}$ | $457.05^{(3)}$ | $457.05^{(3)}$ | $365.61^{(4)}$ | $303.08^{(4)}$ |
| | | II Torsionale | | |
| - | - | $1642.51^{(8)}$ | $539.82^{(5)}$ | $415.56^{(5)}$ |
| | | I di Flessione Combinata | | |
| - | - | - | $970.51^{(9)}$ | $463.38^{(6)}$ |
| | | III Flessionale lungo $x$ | | |
| $1312.77^{(5)}$ | $1164.23^{(6)}$ | $1164.23^{(7)}$ | $851.09^{(7)}$ | $610.16^{(7)}$ |
| | | II di Flessione Combinata | | |
| - | - | - | $1643.65^{(15)}$ | $715.07^{(8)}$ |
| | | II Flessionale lungo $z$ | | |
| $1864.65^{(6)}$ | $1011.28^{(5)}$ | $1011.28^{(6)}$ | $828.95^{(6)}$ | $770.02^{(10)}$ |
| | | III Torsionale | | |
| - | - | $2737.52^{(15)}$ | $1077.56^{(10)}$ | $843.24^{(12)}$ |
| | | I Longitudinale | | |
| $865.68^{(4)}$ | $865.67^{(4)}$ | $865.67^{(5)}$ | $864.56^{(8)}$ | $860.97^{(13)}$ |

| Modello LE (4800 DOFs) | |
|---|---|
| Modi | Frequenze |
| I Flessionale$^x$, Long. 1 | $51.98^{(17)}$ |
| I Flessionale$^x$, Long. 2 | $95.68^{(22)}$ |
| II Flessionale$^x$, Long. 1 | $265.87^{(36)}$ |
| I Flessionale$^z$ | $290.20^{(41)}$ |
| I Torsionale | $313.93^{(43)}$ |
| II Flessionale$^x$, Long. 2 | $412.53^{(50)}$ |
| I di Flessione Combinata | $509.79^{(57)}$ |
| III Flessionale$^x$, Long. 1 | $619.11^{(63)}$ |
| II Flessionale$^z$ | $759.91^{(67)}$ |
| I Longitudinale | $860.58^{(69)}$ |
| III Flessionale$^x$, Long. 2 | $870.99^{(71)}$ |
| II Torsionale | $904.38^{(72)}$ |

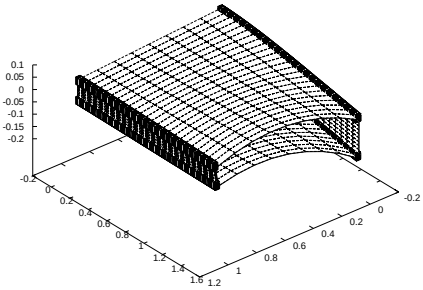
Tabella 7.6. Principali modi di vibrare del tronco alare senza centine e relative frequenze naturali. Confronto tra il modello LE e i modelli TE. Frequenze espresse in [Hz].

In Fig. 7.22 si mostrano i primi modi flessionali attorno all'asse $x$ secondo il modello LE. Risulta chiaro il fenomeno poco sopra descritto.

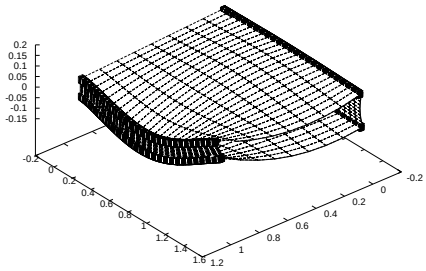
[1] In realtà se si parla di modi di vibrare sarebbe più corretto fare riferimento alla "matrice degli autovettori". Si tratta pur sempre di modelli computazionali.



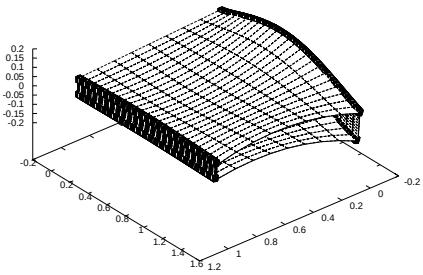
(a) I Flessionale$^x$, Longherone 1



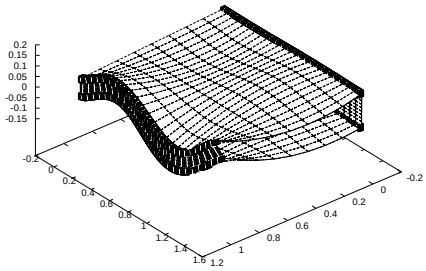
(b) I Flessionale$^x$, Longherone 2



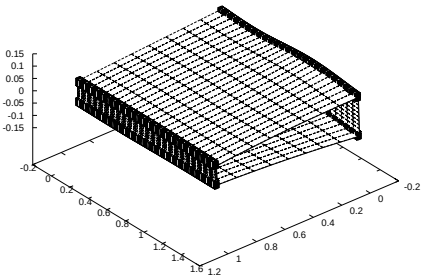
(c) II Flessionale$^x$, Longherone 1



(d) II Flessionale$^x$, Longherone 2



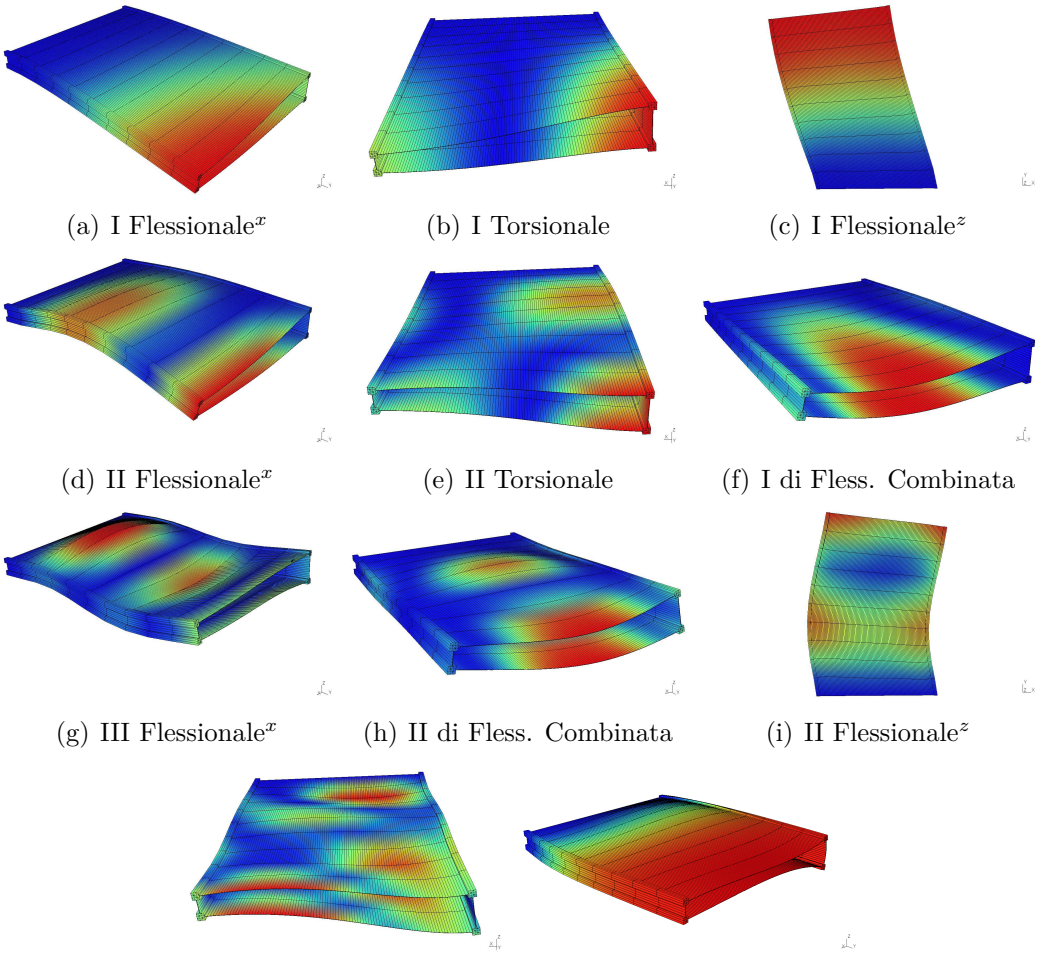
(e) III Flessionale$^x$, Longherone 1



(f) III Flessionale$^x$, Longherone 2

Figura 7.22. Modi flessionali lungo l'asse $x$. Modello LE.

In Fig. 7.23 vengono riportati i principali modi di vibrare della struttura in esame senza irrigidimenti trasversali secondo l'analisi del modello TE di quinto ordine. Si nota come i modi torsionali siano accompagnati da una importante flessione differenziale dei longheroni.
Infine in Fig. 7.24 si riportano alcuni esempi di modi locali *shell* che interessano i pannelli e le anime dei longheroni. È bene ricordare ancora una volta che questi vengono previsti correttamente solo dal modello LE, il quale dimostra ancora una volta la propria superiorità.



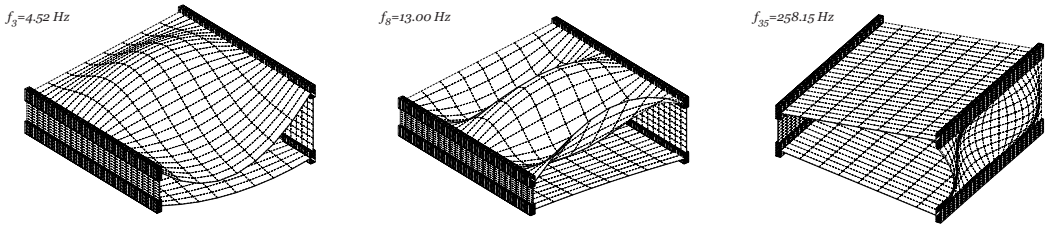
(a) I Flessionale$^x$ (b) I Torsionale (c) I Flessionale$^z$

(d) II Flessionale$^x$ (e) II Torsionale (f) I di Fless. Combinata

(g) III Flessionale$^x$ (h) II di Fless. Combinata (i) II Flessionale$^z$

(j) III Torsionale (k) I Longitudinale

Figura 7.23. Principali modi di vibrare del tronco alare senza centine. Modello TE di quinto ordine.




(a) Modo 3 (b) Modo 8 (c) Modo 35

Figura 7.24. Esempi di modi *shell*. Modello LE.

## 7.6 Tronco Alare con Apertura

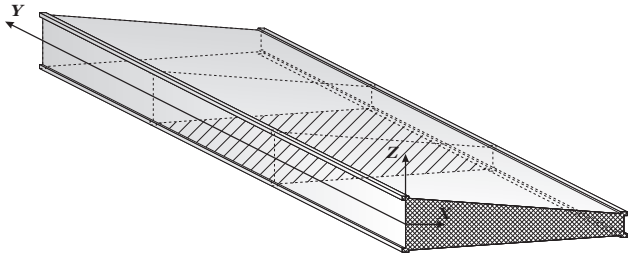



Figura 7.25. Tronco alare con apertura sul ventre.

Per chiudere questo Capitolo analizziamo le vibrazioni non smorzate del tronco alare con apertura sul ventre. La struttura è schematizzata in Fig. 7.25.

| EBBM | TBM | N1 | N3 | N5 | LE |
|---|---|---|---|---|---|
| | | DOFs | | | |
| 495 | 495 | 495 | 1650 | 2331 | 4830 |
| | | I Flessionale lungo $x$ | | | |
| $77.38^{(1)}$ | $76.65^{(1)}$ | $76.65^{(1)}$ | $72.78^{(1)}$ | $63.75^{(1)}$ | $63.31^{(11)}$ |
| | | I Torsionale | | | |
| - | - | $549.72^{(4)}$ | $159.59^{(2)}$ | $111.34^{(2)}$ | $99.50^{(12)}$ |
| | | I Flessionale lungo $z$ | | | |
| $479.03^{(3)}$ | $375.99^{(2)}$ | $375.88^{(2)}$ | $264.28^{(3)}$ | $246.05^{(3)}$ | $223.92^{(18)}$ |
| | | II Flessionale lungo $x$ | | | |
| $469.89^{(2)}$ | $444.72^{(3)}$ | $444.71^{(2)}$ | $352.15^{(4)}$ | $301.47^{(4)}$ | $287.77^{(23)}$ |
| | | I di Flessione Combinata | | | |
| - | - | - | $948.09^{(9)}$ | $406.35^{(5)}$ | $331.62^{(28)}$ |
| | | II Torsionale | | | |
| - | - | $1650.58^{(8)}$ | $543.71^{(5)}$ | $443.30^{(6)}$ | $414.73^{(31)}$ |
| | | II Flessionale lungo $z$ | | | |
| $1871.56^{(6)}$ | $1021.23^{(5)}$ | $1021.02^{(6)}$ | $830.61^{(8)}$ | $682.31^{(9)}$ | $471.31^{(37)}$ |
| | | III Flessionale lungo $x$ | | | |
| $1274.16^{(5)}$ | $1128.63^{(6)}$ | $1128.61^{(7)}$ | $794.80^{(6)}$ | $770.60^{(11)}$ | $616.22^{(40)}$ |
| | | II di Flessione Combinata | | | |
| - | - | - | $1636.19^{(16)}$ | $516.07^{(7)}$ | $676.30^{(41)}$ |
| | | III Torsionale | | | |
| - | - | $2750.00^{(15)}$ | $1060.73^{(10)}$ | $847.66^{(13)}$ | $703.50^{(42)}$ |
| | | III Flessionale lungo $z$ | | | |
| $3844.97^{(10)}$ | $1816.09^{(7)}$ | $1815.02^{(9)}$ | $1117.55^{(12)}$ | $860.79^{(14)}$ | $765.94^{(43)}$ |
| | | I Longitudinale | | | |
| $852.69^{(4)}$ | $852.09^{(4)}$ | $852.09^{(5)}$ | $825.66^{(7)}$ | $791.21^{(12)}$ | $825.60^{(47)}$ |

Tabella 7.7. Numero dei gradi di libertà e principali modi di vibrare del tronco alare con apertura. Frequenze proprie per vari modelli. Valori in [Hz].

La Tabella 7.7 riassume le principali frequenze naturali dei primi dodici modi travati nell'analisi dei vari modelli CUF implementati e il numero di gradi di libertà. In parentesi viene indicata, come sempre, la posizione che ciascuna frequenza occupa nel vettore degli autovalori.
Notiamo subito che nel caso in esame i modelli TE presentano delle difficoltà. Infatti, tranne che per il modo di vibrare longitudinale, predetto correttamente anche dai modelli classici, i modelli *Taylor Expansion - based* colgono in modo adeguato solo fino al secondo modo flessionale attorno all'asse $x$, dopodiché restituiscono risultati non precisi se paragonati al modello LE.

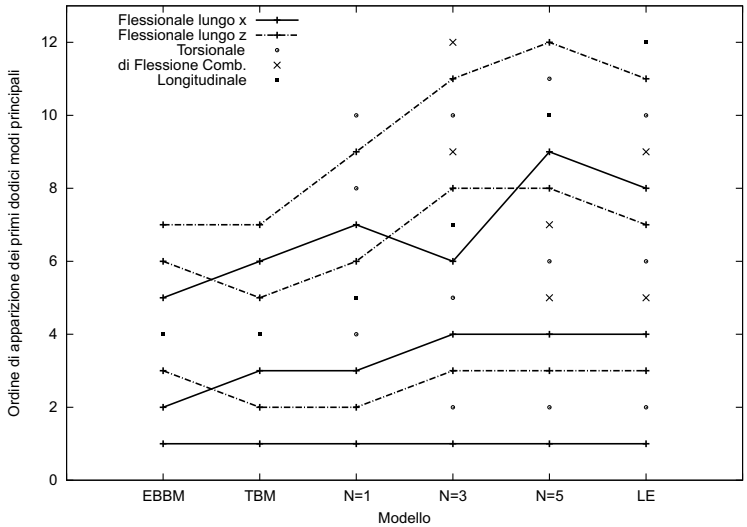
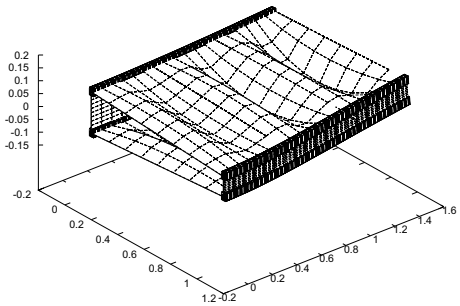
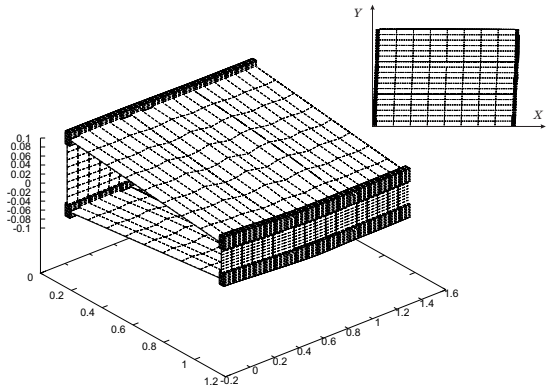



Figura 7.26. Confronto tra modelli implementati e frequenze e modi di vibrare del tronco alare con apertura sul ventre.

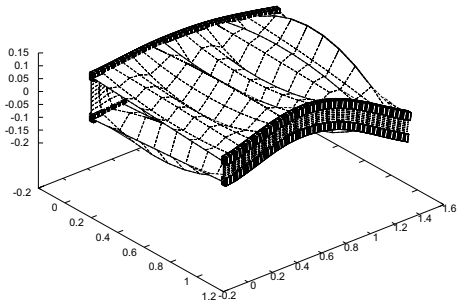
Questa osservazione viene confermata dalla Fig. 7.26, nella quale viene diagrammato l'ordine con cui appaiono i modi analizzati nella matrice degli autovettori.
La Fig. 7.27 mostra i primi sei modi flessionali predetti dal modelli LE, mentre in Fig. 7.28 si riportano tutti i dodici modi principali secondo un analisi TE di quinto ordine.
Si apprezzi come i modelli *Lagrange Expansion - based* descrivano i modi principali come accompagnati da modi locali dei pannelli, comportamento tipico delle strutture a sezione in parete sottile.
Osservando, invece, la Fig 7.28 si nota come il modello TE di quinto ordine cominci a fare fatica nel descrivere correttamente questa particolare configurazione del tronco.
Infine, in Fig. 7.29 si riportano degli esempi di modi *shell* che coinvolgono pannelli e anime dei longheroni.



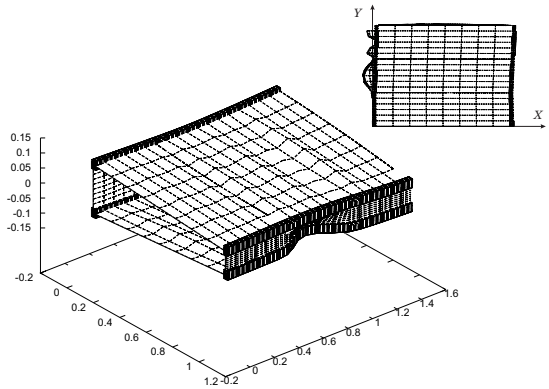
(a) I Flessionale$^x$



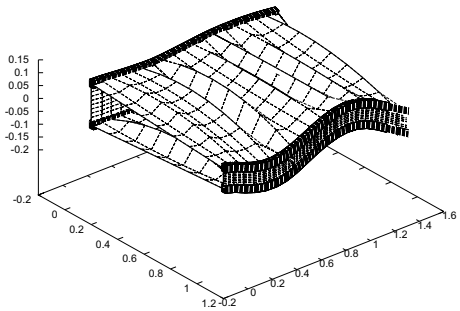

(b) I Flessionale$^z$



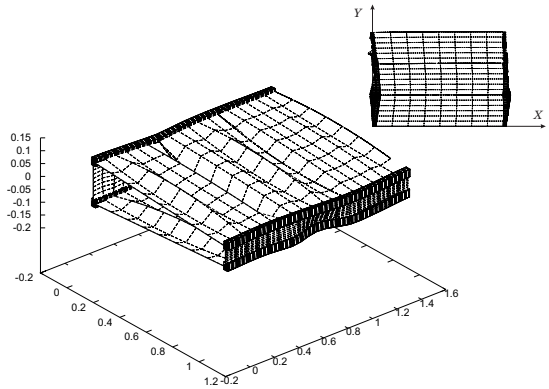
(c) II Flessionale$^x$




(d) II Flessionale$^z$

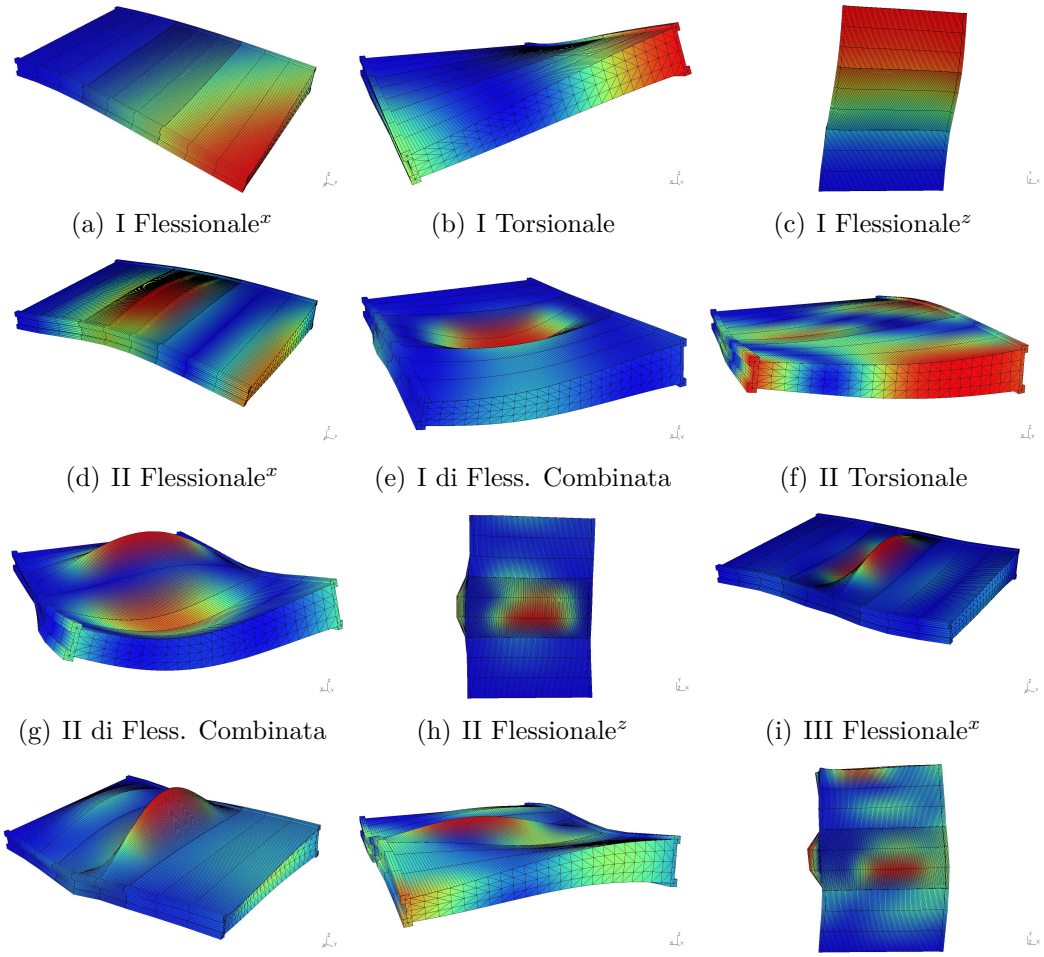


(e) III Flessionale$^x$




(f) III Flessionale$^z$

Figura 7.27. Modi flessionali del tronco alare con apertura sul ventre. Modello LE.



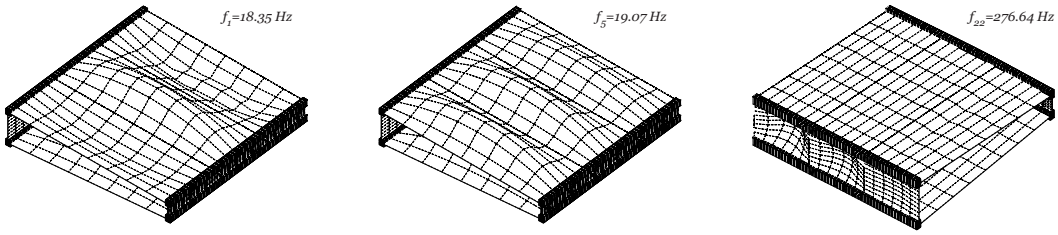
(a) I Flessionale$^x$ (b) I Torsionale (c) I Flessionale$^z$

(d) II Flessionale$^x$ (e) I di Fless. Combinata (f) II Torsionale

(g) II di Fless. Combinata (h) II Flessionale$^z$ (i) III Flessionale$^x$

(j) I Longitudinale (k) III Torsionale (l) III Flessionale$^z$

Figura 7.28. Principali modi di vibrare del tronco alare con apertura. Modello TE di quinto ordine.




(a) Modo 3 (b) Modo 8 (c) Modo 35

Figura 7.29. Esempi di modi *shell*. Modello LE.

# Capitolo 8

# Aeroelasticità: Fenomenologia e Formulazione

Aeroelasticità è il termine usato per indicare il campo di studi che concerne l'interazione tra la deformazione di una struttura elastica in un fluido e le forze aerodinamiche risultanti [21].
La natura interdisciplinare di questo campo può essere meglio compresa dalla Fig. 8.1, ripresa dal testo *"Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity"* di Hodges e Pierce dell'Università di Cambridge.

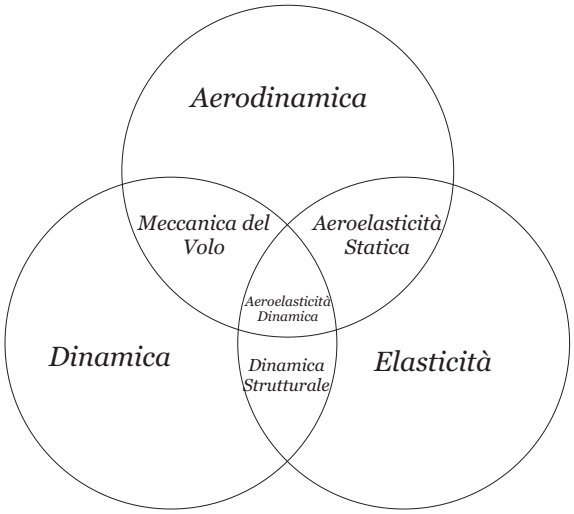



Figura 8.1. Schema dei campi di studio dell'aeroelasticità.

Le teorie classiche dell'aerodinamica forniscono una stima delle forze che agiscono su di un corpo di data forma. L'elasticità, come visto, provvede a determinare la forma di un corpo elastico soggetto a determinati carichi. Infine, la dinamica introduce

gli effetti delle forze inerziali. In aeroelasticità i carichi dipendono dalla condizione deformata del corpo, che a sua volta dipende dai carichi, innescando fenomeni di accoppiamento.
È interessante notare che i fenomeni aeroelastici hanno giocato un ruolo fondamentale nella storia del volo.
I fratelli Wright nel 1903 utilizzarono il controllo del *warping* delle ali sul loro Wright Flyer per ottenere il controllo laterale. Ciò fu fondamentale per il loro successo, dal momento che l'aeromobile era lateralmente instabile a causa delle ali a diedro negativo.
Qualche tempo prima, sempre nel 1903, Samuel Langley fece due tentativi di volo a motore dalla cima di una casa galleggiante sul fiume Potomac. I suoi sforzi si tramutarono in fallimenti catastrofici a causa della rottura a *divergenza statica* delle ali, dovuta alla loro insufficiente rigidezza torsionale. Il fenomeno della divergenza torsionale fu uno dei fattori più importanti che portarono alla predominanza dei biplani fino ai primi degli anni '30, quando furono introdotte "strutture a rivestimento resistente" in metallo.
Il primo caso documentato di *flutter* risale, invece, al 1916. La coda del bombardiere Handley Page O/400 subì violente oscillazioni a causa della mancanza di una barra di torsione che connettesse gli equilibratori di destra e di sinistra, un requisito assolutamente fondamentale nei progetti moderni. L'incidente comportò una torsione dinamica che portò la fusoliera a ruotare di circa 45 gradi in congiunzione con un modo flessionale asimmetrico degli equilibratori.
La rottura catastrofica dovuta a flutter divenne uno degli aspetti più stringenti nel progetto di velivoli durante tutta la Prima Guerra Mondiale, e lo è tuttora. Nell'Agosto del 1928 R. A. Frazer e W. J. Duncan del National Physical Laboratory in Inghilterra compilarono un documento su questo tema, intitolato "The Flutter of Aeroplane Wings". Questo piccolo testo divenne noto come "La Bibbia del Flutter". Le loro trattazioni delle analisi e del problema della prevenzione del flutter stesero le basi per le tecniche in uso oggi.
Un altro importante aspetto del progetto di aeromobili che può essere classificato come fenomeno aeroelastico statico fu quello subito nel 1927 dal Bristol Bagshot, un aereo Inglese ad allungamento elevato spinto da due motori. All'aumentare della velocità di volo l'efficacia del comando degli alettoni diminuiva fino ad arrivare a zero, per poi divenire negativa. Questo fenomeno è comunemente conosciuto come inversione del comando degli alettoni. L'incidente successivamente fu analizzato e furono studiati criteri per prevenirlo da Roxbee Cox e Pugsley alla Royal Aircraft Establishment nel primi anni del 1930. Furono proprio loro a proporre il nome "aeroelasticità" per descrivere questi fenomeni.
Da questi brevi cenni storici si intuisce come i problemi più comuni cui deve far fronte l'aeroelasticità sono essenzialmente problemi di stabilità. Benchè il modulo elastico di un dato componente strutturale risulti indipendente dalla velocità di

volo del velivolo, le forze aerodinamiche ne dipendono strettamente. Non è quindi difficile immaginare scenari in cui le forze aerodinamiche surclassino le forze di richiamo elastico. Quando ciò accade in modo che le forze inerziali rivestino un ruolo secondario, si parla di instabilità aeroelastica statica, o "divergenza". Viceversa, quando le forze inerziali sono importanti, l'instabilità dinamica che ne consegue è detta "flutter". Sia la divergenza che il flutter possono essere fenomeni catastrofici e portare all'improvvisa distruzione dell'aeromobile. Ecco perchè è di vitale importanza per i progettisti essere in possesso di mezzi per progettare correttamente superfici portanti che siano prive di questi problemi.

## 8.1 Il Problema Aeroelastico

Il Problema Aeroelastico è generalmente posto facendo riferimento ad un sistema dinamico del secondo ordine. L'equazione di equilibrio risulta:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_a)\mathbf{q} + (\mathbf{D} + \mathbf{D}_a)\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{M} + \mathbf{M}_a)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}_{na} \tag{8.1}$$

dove $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{M}$ sono rispettivamente la matrice di rigidezza, la matrice di smorzamento e la matrice delle masse strutturali, mentre $\mathbf{K}_a$, $\mathbf{D}_a$ e $\mathbf{M}_a$ sono le controparti di natura aerodinamica. $\mathbf{F}_{na}$ rappresenta il vettore dei carichi non aerodinamici. Perturbando la condizione di equilibrio, ponendo cioè $\mathbf{q} = \mathbf{q} + \delta\mathbf{q}$, si ottiene:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_a)(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}) + (\mathbf{D} + \mathbf{D}_a)(\dot{\mathbf{q}} + \delta\dot{\mathbf{q}}) + (\mathbf{M} + \mathbf{M}_a)(\ddot{\mathbf{q}} + \delta\ddot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}_{na} \tag{8.2}$$

Generalmente si pone:

$$\mathbf{D} \approx 0 \qquad \mathbf{M}_a \approx 0 \tag{8.3}$$

Per cui il problema, sotto forma di equazione di stabilità, può essere scritto come segue:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_a)\delta\mathbf{q} + \mathbf{D}_a\delta\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{q}} = 0 \tag{8.4}$$

Essendo questo un sistema differenziale lineare, possiamo passare dal dominio del tempo al dominio delle frequenze, ipotizzando soluzioni armoniche del tipo:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{q} &= \delta\overline{\mathbf{q}}\, e^{i\omega t} \\ \delta\dot{\mathbf{q}} &= i\omega\, \delta\overline{\mathbf{q}}\, e^{i\omega t} \\ \delta\ddot{\mathbf{q}} &= -\omega^2\, \delta\overline{\mathbf{q}}\, e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{8.5}$$

Sostituendo questa soluzione nell'Eq. 8.4 si ottiene la formulazione:

$$\delta\overline{\mathbf{q}}\, e^{i\omega t}[(\mathbf{K} + \mathbf{K}_a) + \mathbf{D}_a\, \omega + \mathbf{M}\, \omega^2] = 0 \tag{8.6}$$

Ci si riduce quindi ad un problema agli autovalori, rappresentati dalla pulsazione $\omega$.

### 8.1.1 Soluzione del Problema agli Autovalori Quadratico

Generalmente è possibile trasformare un problema agli autovalori quadratico in un problema agli autovalori classico. Partendo dal problema aeroelastico scritto nella forma riportata nell'Eq. 8.4 e ponendo per semplicità $\mathbf{q} = \delta\mathbf{q}$, si può infatti scrivere:

$$\begin{cases} (\mathbf{K} + \mathbf{K}_a)\mathbf{q} + \mathbf{D}_a\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = 0 \\ -\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}} = 0 \end{cases} \tag{8.7}$$

Introducendo una nuova variabile, $\mathbf{Q}$, definita come:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \\ \dot{\mathbf{Q}} &= \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{8.8}$$

Si ottiene la seguente forma matriciale:

$$[\mathbf{R}]\dot{\mathbf{Q}} + [\mathbf{T}]\mathbf{Q} = 0 \tag{8.9}$$

dove le matrici $[\mathbf{R}]$ e $[\mathbf{T}]$ sono ricavate a partire dal sistema di Eq. 8.7:

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}] &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_a & \mathbf{M} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ [\mathbf{T}] &= \begin{bmatrix} (\mathbf{K} + \mathbf{K}_a) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8.10}$$

Supponendo una soluzione armonica per la nuova variabile $\mathbf{Q}$, siamo in grado di passare dal dominio del tempo al dominio delle frequenze, ottenendo il problema agli autovalori nella forma:

$$[\mathbf{T}]^{-1}[\mathbf{R}] - \frac{1}{\omega}\,\mathbf{I} = 0 \tag{8.11}$$

dove:

$$[\mathbf{T}]^{-1}[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} (\mathbf{K} + \mathbf{K}_a)^{-1}\mathbf{D}_a & (\mathbf{K} + \mathbf{K}_a)^{-1}\mathbf{M} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{8.12}$$

L'Eq. 8.11 rappresenta appunto una scrittura in forma classica del problema agli autovalori nell'incognita $\omega$.
L'analisi di stabilità del sistema consisterà a questo punto nell'andare a studiare l'andamento delle parti reale ed immaginaria dell'autovalore $\omega$ al variare della velocità. Il confine di stabilità si andrà a individuare laddove se ne annulli la parte reale.

## 8.2 Strip Theory

La *teoria di striscia* rappresenta il modello aerodinamico più semplice tra i modelli classici. Questo, seppur valido solamente per allungamenti alari elevati, ci consente comunque una prima stima delle forze agenti sulle strutture analizzate.
La teoria prevede un flusso stazionario incompressibile e inviscido, vale esclusivamente per profili sottili e non tiene in considerazione la deformazione della sezione.
In generale è possibile esprimere la portanza come il prodotto tra la pressione dinamica, la superficie alare e il coefficiente di portanza $C_L = C_{L_\alpha}\alpha$:

$$L = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S C_{L_\alpha}\alpha \tag{8.13}$$

La formulazione si basa su una distribuzione di portanza tale per cui il fuoco si trovi sul quarto anteriore della corda e il coefficiente $C_{L_\alpha}$ valga $2\pi$.
In base a queste ipotesi, partendo dall'Eq. 8.13, si ricava l'andamento del salto di pressione sulla lamina piana lungo la corda alare:

$$\Delta p(x) = 2\rho_\infty V_\infty^2 \sqrt{\frac{c-x}{x}}\alpha \tag{8.14}$$

dove $c$ rappresenta la dimensione geometrica della corda, mentre $x$ la direzione lungo cui si sviluppa.
L'Eq. 8.14 è diagramamta in Fig. 8.2 per una pressione dinamica $q_\infty = \frac{1}{4}$ [Pa], un incidenza $\alpha = 1$ [rad] e una corda $c = 1$ [m].

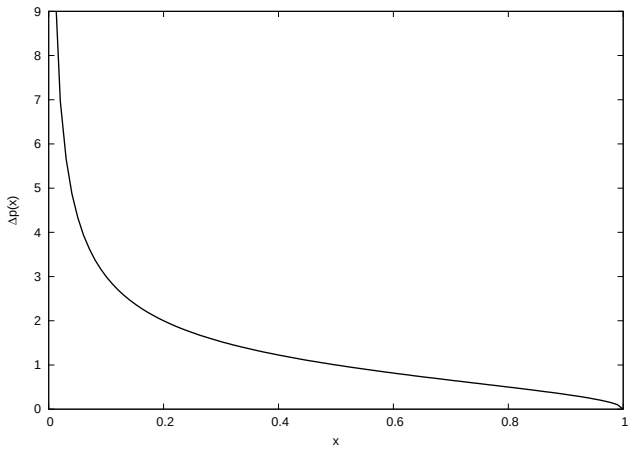



Figura 8.2. Distribuzione del salto di pressione lungo la corda alare su una lamina piana.

### 8.2.1 Divergenza Statica

La divergenza è un tipico fenomeno di aeroelsticità statica che può essere descritto come la particolare condizione di equilibrio statico in cui le forze derivanti dalla configurazione deformata sono completamente equilibrate dalle azioni aerodinamiche. Tale fenomeno si presenta sotto forma di torsione dell'ala che, superata la velocità limite per la quale si raggiunge la condizione di equilibrio, porta ad un repentino aumento dell'angolo di torsione dell'ala che culmina in una rottura che compromette inevitabilmente l'integrita della struttura stessa.
Introdotto il modello matematico dettato dalla teoria di striscia, è possibile riscrivere l'andamento del salto di pressione, riportato nell'Eq. 8.14, in funzione dei gradi di libertà nodali, $\mathbf{q}$, definiti dal modello strutturale CUF.
Benchè il modello utilizzato sia in grado di considerare la deformabilità della sezione, la teoria aerodinamica utilizzata ha validità solamente per sezioni rigide, quindi solo la componente di rotazione rigida della sezione avrà un'effettiva influenza nella definizione dell'angolo $\alpha$. Quest'ultimo sarà infatti definito come:

$$\alpha = \frac{\partial u_z}{\partial x} \tag{8.15}$$

Quindi, secondo il modello CUF, il salto di pressione può essere scritto come:

$$\begin{cases} \Delta p(x)^{\tau i} = 2\rho_\infty V_\infty^2 \sqrt{\dfrac{c-x}{x}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} N_i \dfrac{\partial F_\tau}{\partial x} q_{\tau i} & \text{per } \tau = 2 \\ \Delta p(x)^{\tau i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{per } \tau \neq 2 \end{cases} \tag{8.16}$$

Questo produce una variazione di lavoro virtuale espressa da:

$$\begin{cases} \delta L_{\Delta p(x)} = \displaystyle\int_\Omega \Big( 2\rho_\infty V_\infty^2 \delta q_{sj} \sqrt{\frac{c-x}{x}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i N_j \end{bmatrix} F_s \frac{\partial F_\tau}{\partial x} q_{\tau i} \Big) d\Omega & \text{per } \tau = 2 \\ \delta L_{\Delta p(x)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{per } \tau \neq 2 \end{cases} \tag{8.17}$$

Dalla variazione virtuale del lavoro fatto dal salto di pressione è possibile, infine,

isolare il nucleo fondamentale della matrice di rigidezza aerodinamica:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_a^{ij\tau s} = 2\rho_\infty V_\infty^2 \int_c \sqrt{\dfrac{c-x}{x}} F_s \dfrac{\partial F_\tau}{\partial x} dx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \int_L N_i N_j dy \end{bmatrix} & \text{per } \tau = 2 \\ \mathbf{K}_a^{ij\tau s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{per } \tau \neq 2 \end{cases} \tag{8.18}$$

Assemblando i singoli nuclei per l'intera struttura, si ottiene la matrice di rigidezza aerodinamica globale, e il problema aeroelastico si presenta come:

$$\mathbf{K} + \lambda\, \mathbf{K}_a = 0 \tag{8.19}$$

dove

$$\lambda = 2\rho_\infty V_\infty^2 \tag{8.20}$$

rappresentano gli autovalori del problema, che, sotto forma di problema classico agli autovalori può scriversi come segue:

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_a - \frac{1}{\lambda}\, \mathbf{I} = 0 \tag{8.21}$$

La velocità di divergenza cercata corrisponde alla $V_\infty$ relativa all'autovalore minimo:

$$V_D = \sqrt{-\frac{\lambda_{min}}{2\rho_\infty}} \tag{8.22}$$

### 8.2.2 Flutter

Il flutter è un fenomeno di aeroelasticità dinamica. Tale fenomeno, infatti, coinvolge azioni meccaniche, inerziali e aerodinamiche che vanno a equilibrarsi vicendevolmente.
Si tratta di una vibrazione autosostenuta e potenzialmente distruttiva in cui le forze aerodinamiche si accoppiano con i modi di vibrare di una struttura, generando un rapido moto armonico.
Più precisamente, questa instabilità si manifesta come un accoppiamento tra una delle prime frequenze flessionali e la prima frequenza torsionale. Tale accoppiamento fa si che, giunti alla velocità critica, o di flutter, la struttura incominci ad autoeccitarsi estraendo energia dal fluido e arrivi, nella maggior parte dei casi, al collasso strutturale in poco tempo.
Sono affette da tale fenomeno tutte le strutture ad allungamento relativamente elevato e non solo quelle aeronautiche. Un famoso esempio è costituito dal collasso del

Tacoma Narrows Bridge originale, il quale, dopo poco tempo dalla sua costruzione, è stato abbattuto da un vento relativamente debole a causa di un fenomeno di flutter. Lo studio accurato di questo fenomeno, data la sua natura fortemente instazionaria, richiede l'impiego di modelli aerodinamici piuttosto complessi. La teoria aerodinamica considerate, la strip theory, rappresenta una modellizzazione decisamente troppo ridotta per lo studio del flutter ma comunque sufficiente a dare alcune prime indicazioni. Scopo di questa parte del lavoro è, infatti, dimostrare la possibilità di utilizzare i modelli strutturali basati sulla *Carrera's Unified Formulation* per analisi multicampo e problemi accoppiati.
L'applicazione della teoria di striscia allo studio del flutter è molto semplice. Nell'Eq. 8.14, che descrive il salto di pressione sul profilo, bisogna dare una definizione dell'angolo di incidenza $\alpha$ che tenga conto anche della velocità di traslazione verticale, in modo da adottare per i carichi aerodinamici una espressione quasi-stazionaria:

$$\alpha = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\dot{u}_z}{V_\infty} \tag{8.23}$$

Sostituendo quest'ultima equazione nell'Eq. 8.14, si ricava l'andamento del salto di pressione per il caso in esame, evidenziando la presenza sia di un contributo statico che di uno dinamico:

$$\Delta p(x) = 2\rho_\infty V_\infty^2 \sqrt{\frac{c-x}{x}} \frac{\partial u_z}{\partial x} + 2\rho_\infty V_\infty \sqrt{\frac{c-x}{x}} \dot{u}_z \tag{8.24}$$

La prima parte è esattamente quella studiata nel paragrafo precedente e porta alla definizione della matrice di rigidezza aerodinamica riportata nell'Eq. 8.18 . La correzione cinematica, come vedremo, dà luogo invece alla definizione della matrice aerodinamica di smorzamento.
Isolando, infatti, gli effetti dinamici, possiamo scrivere il salto di pressione, nella formulazione FE basata sulla CUF, come:

$$\begin{cases} \Delta p(x)^{\tau i} = 2\rho_\infty V_\infty \sqrt{\dfrac{c-x}{x}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} N_i F_\tau \dfrac{\partial q_{\tau i}}{\partial t} & \text{per } \tau = 1 \\ \Delta p(x)^{\tau i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{per } \tau \neq 1 \end{cases} \tag{8.25}$$

A questo punto la variazione del lavoro virtuale viene espressa come:

$$\begin{cases} \delta L_{\Delta p(x)} = \int_\Omega \Big(2\rho_\infty V_\infty \delta q_{sj} \sqrt{\dfrac{c-x}{x}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i N_j \end{bmatrix} F_s F_\tau \dfrac{\partial q_{\tau i}}{\partial t}\Big) d\Omega & \text{per } \tau = 1 \\ \delta L_{\Delta p(x)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{per } \tau \neq 1 \end{cases} \tag{8.26}$$

Risulta, infine, banale estrarre da quest'ultima espressione il nucleo fondamentale della matrice di smorzamento aerodinamica:

$$\begin{cases} \mathbf{D}_a^{ij\tau s} = 2\rho_\infty V_\infty \int_c \sqrt{\dfrac{c-x}{x}} F_s F_\tau dx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \int_L N_i N_j dy \end{bmatrix} & \text{per } \tau = 1 \\ \mathbf{D}_a^{ij\tau s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{per } \tau \neq 1 \end{cases} \tag{8.27}$$

Con questa matrice abbiamo tutto per effettuare un analisi completa del problema aeroelastico, che si presenta come:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_a) + \mathbf{D}_a\, \omega + \mathbf{M}\, \omega^2 = 0 \tag{8.28}$$

Per la sua risoluzione si riveda il Paragrafo 8.1.
Nel caso del flutter, la determinazione della velocità critica si effettua analizzando il comportamento delle parti reali degli autovalori della matrice $[\mathbf{T}]^{-1}[\mathbf{R}]$ al variare della velocità $V_\infty$. L'andamento tipico è rappresentato in Fig. 8.3.

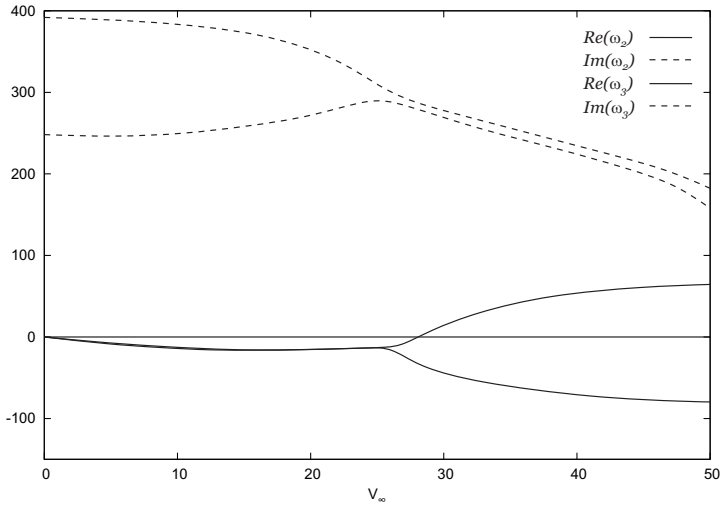



Figura 8.3. Tipico andamento degli autovalori nel problema del flutter.

Il valore della velocità critica di flutter va a localizzarsi in corrispondenza del cambiamento di segno della parte reale del terzo autovalore (a circa 25 $m/s$), che corrisponde al primo modo di vibrare torsionale.
Il cambiamento di segno della parte reale viene accompagnato dalla fusione delle frequenze di vibrazione del secondo modo, rappresentante uno dei primi modi flessionali, e il terzo (coalescenza dei modi).
L'analisi dinamica consente, inoltre, di individuare la velocità critica di divergenza statica come caso particolare di oscillazione non periodica. In tal caso la frequenza di vibrazione, rappresentata dalla parte immaginaria dell'autovalore, precipita bruscamente a zero, seguita dalla parte reale che interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza della velocità critica torsionale.

# Capitolo 9

# Analisi dei Fenomeni di Divergenza

## 9.1 Ala a Freccia Inversa

Nell'implementazione della strip theory nel codice strutturale si è preso come riferimento una lamina piana caretterizzata da un angolo di freccia negativo. La struttura presa in esame viene mostrata in Fig. 9.1, mentre in Tabella 9.1 se ne riportano le caratteristiche geometriche.

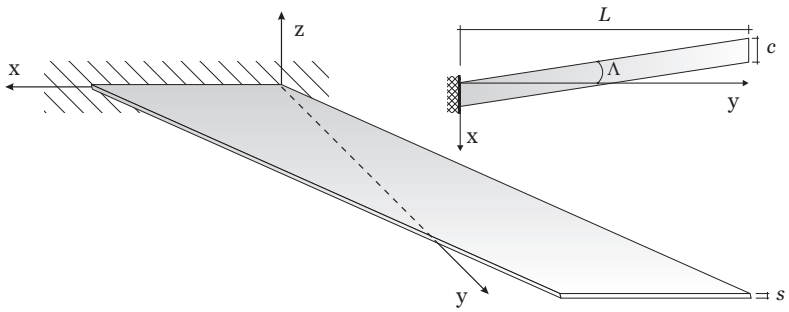



Figura 9.1. Lamina piana a freccia inversa.

| $L$ | $c$ | $s$ | $\Lambda$ |
|---|---|---|---|
| $[m]$ | $[m]$ | $[m]$ | $[\,^\circ]$ |
| 70.00 | 6.00 | 0.19 | $-20$ |

Tabella 9.1. Dimensioni geometriche dell'ala a freccia negativa.

L'intera struttura è composta da un materiale isotropo avente le seguenti caratteristiche: modulo di elasticità $E = 7.2 \times 10^{10}$ [Pa]; densità $\rho = 213.8684$ [Kg/m$^3$];

coefficiente di Poisson $\nu = 0.33$.
Il flusso che lambisce la lamina scorre in direzione $x$ e presenta una densità pari a $\rho_\infty = 1.225$ [Kg/m$^3$].
È comunemente noto che ali che presentano questa configurazione, pur essendo ottime dal punto di vista aerodinamico e del centraggio, sono state sempre penalizzate dalla possibilità di insorgenza di fenomeni di flutter e soprattutto da problemi di divergenza aeoelastica.
Nel caso statico la determinazione della velocità critica avviene, come detto, tramite la risoluzione di un problema classico agli autovalori: l'autovalore che ha significato di limite di stabilità statica è il più basso tra gli autovalori reali (se esistono) della matrice $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_a$. I modi di divergenza vengono poi calcolati come autovettori relativi al rispettivo autovalore.
La Tabella 9.2 riassume i risultati di diverse analisi di modelli TE per il calcolo della velocità di divergenza torsionale. Tutti i modelli rifiniti unidimensionali sono stati implementati facendo uso di 10 elementi B4 lungo l'asse della trave $y$.

| | $V_D$ $[m/s]$ | $DOFs$ |
|---|---|---|
| NASTRAN© SOL. 144 | 25.2 | 2982 |
| EBBM | $1.1 \times 10^8$ | 279 |
| TBM | $6.7 \times 10^6$ | 279 |
| $N = 1$ | 522.5 | 279 |
| $N = 2$ | 23.3 | 558 |
| $N = 3$ | 24.4 | 930 |
| $N = 4$ | 24.9 | 1395 |

Tabella 9.2. Velocità di divergenza e numero di gradi di libertà per i modelli TE implementati. Ala a freccia negativa.

I risultati vengono confrontati con un valore di velocità critica preso in letteratura. Questo è stato calcolato tramite la SOL 144 del codice NASTRAN©, utilizzando per la mesh strutturale elementi *shell* QUAD4.
I modelli CUF riescono a prevedere la soluzione con scarto minimo solo se l'ordine di espansione della teoria è abbastanza elevato da descrivere correttamente il primo modo torsionale della struttura. Ciò risulta più chiaro dall'analisi della Tabella 9.3, in cui si riportano le frequenze naturali dei primi quattro modi di vibrare dell'ala a freccia invertita per i vari modelli analizzati. Il primo modo torsionale corrisponde al *Modo* 4, mentre i primi tre sono rappresentati da modi flessionali.

| | *Modo* 1 | *Modo* 2 | *Modo* 3 | *Modo* 4 |
|---|---|---|---|---|
| NASTRAN© | 0.103 | 0.644 | 1.801 | 2.508 |
| EBBM | 0.115 | 0.720 | 2.017 | - |
| TBM | 0.115 | 0.720 | 2.017 | - |
| N1 | 0.115 | 0.720 | 2.016 | - |
| N2 | 0.099 | 0.619 | 1.725 | 2.537 |
| N3 | 0.099 | 0.620 | 1.719 | 2.371 |
| N4 | 0.098 | 0.610 | 1.683 | 2.256 |

Tabella 9.3. Primi quattro modi di vibrare dell'ala a freccia negativa.

Per concludere, la Fig. 9.2 mostra il modo di divergenza torsionale della struttura considerata secondo l'analisi TE di quarto ordine.

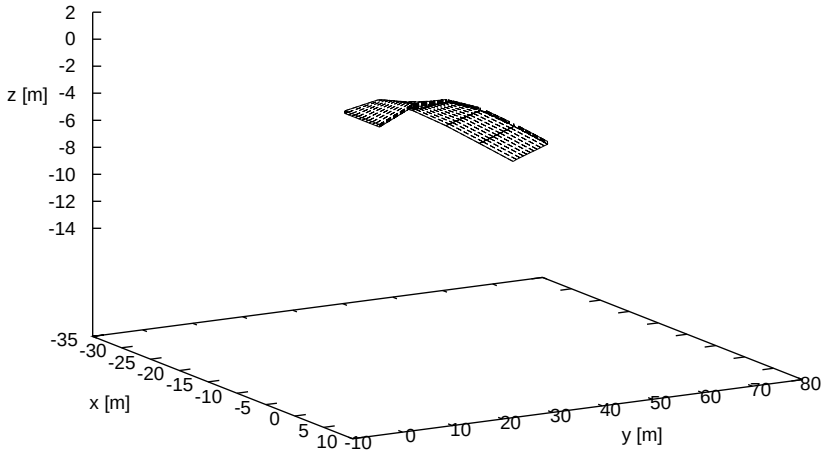



Figura 9.2. Modo di divergenza dell'ala a freccia invertita. Modello TE di quarto ordine.

## 9.2 Tronco Alare con e senza Centine

Riprendiamo il tronco alare analizzato nei precedenti capitoli. L'analisi aeroelastica consisterà nel calcolo della velocità di divergenza di una struttura alare come quella mostrata in Fig. 9.3.

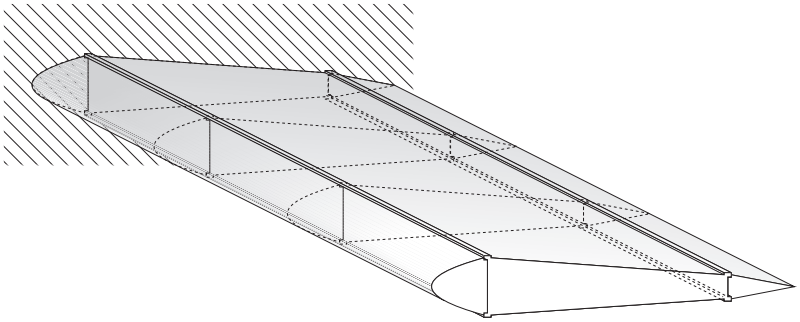


Figura 9.3. Struttura alare.

Le dimensioni del tronco alare sono le stesse riportate nella Tabella 6.1, mentre le caratteristiche del flusso che investe la struttura sono riassunte in Tabella 9.4.

| $\rho_\infty$ $[Kg/m^3]$ | T $[K]$ | R $[J/(KgK)]$ | $\gamma$ |
|---|---|---|---|
| 1.225 | 298 | 287 | 1.4 |

Tabella 9.4. Proprietà del flusso.

La Tabella 9.5 riporta, insieme al numero dei gradi di libertà, la velocità di divergenza per la struttura analizzata tramite modelli TE con l'implementazione della *Strip Theory* per vari ordini di espansione della teoria strutturale. I risultati si riferiscono al tronco alare con centine.
Si noti come i modelli i quali non riescono a prevedere correttamente i modi torsionali della struttura alare restituiscano valori sbagliati per la velocità di divergenza statica.
I risultati ottenuti vengono confrontati con una soluzione analitica. Questa viene ricavata schematizzando la struttura secondo il modello del *Semiguscio ideale* e risolvendo l'equazione all'equilibrio torsionale in forma differenziale di una trave:

$$\frac{d}{dy}\left(GJ_t\frac{d\theta}{dy}\right) - \lambda_\infty x_F c C_{L_\alpha}\theta = 0 \tag{9.1}$$

Quest'ultima equazione può essere posta nella forma:

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \eta^2\theta = 0 \tag{9.2}$$

| | $V_D$ $[m/s]$ | $DOFs$ |
|---|---|---|
| Sol. Analitica | 853.1 | - |
| EBBM | $32 \times 10^9$ | 495 |
| TBM | $1.6 \times 10^9$ | 495 |
| $N = 1$ | 5595.0 | 495 |
| $N = 2$ | 1434.8 | 990 |
| $N = 3$ | 1412.3 | 1650 |
| $N = 4$ | 1087.2 | 2070 |
| $N = 5$ | 920.1 | 2331 |
| $N = 6$ | 861.9 | 2352 |

Tabella 9.5. Velocità di divergenza e numero di gradi di libertà per i modelli TE implementati. Tronco alare con centine.

dove:

$$\eta^2 = -\frac{\lambda_\infty c x_F C_{L_\alpha}}{G J_t} \tag{9.3}$$

Risolvendo il problema agli autovalori, si trova che il minimo valore di $\eta$ si ha per:

$$\eta = \frac{\pi}{2L} \tag{9.4}$$

dove $L$ rappresenta l'apertura alare. Dal risultato riportato dall'Eq. 9.4, si ricava la velocità di divergenza torsionale dell'ala:

$$V_D = \frac{\pi}{2L}\sqrt{-\frac{2GJ_t}{\rho_\infty c x_F C_{L_\alpha}}} \tag{9.5}$$

dove $c$ rappresenta la corda alare; $x_F$ la distanza tra il baricentro e il fuoco dell'ala, negativa se il fuoco è posto anteriormente al baricentro; $J_t$ il momento di inerzia torsionale.

Il modello analitico presentato si presta bene allo studio di fenomeni aeroelastici statici per ali ad allungamento finito con geometrie molto semplici. Tale soluzione, tuttavia, non risulterà attendibile per la configurazione senza centine del cassone per via dell'insorgenza dei modi flessional-differenziali, i quali non vengono presi in considerazione da questa formulazione.

In Fig. 9.4 viene mostrato il modo di divergenza del tronco con centine derivante dall'analisi di un modello TE di quinto ordine.

L'implementazione del modello del tronco alare senza centine mostra una diminuzione della velocità critica di stabilità statica. In Tabella 9.6 si riportano i risultati delle analisi al variare dell'ordine di espansione del modello strutturale TE, insieme

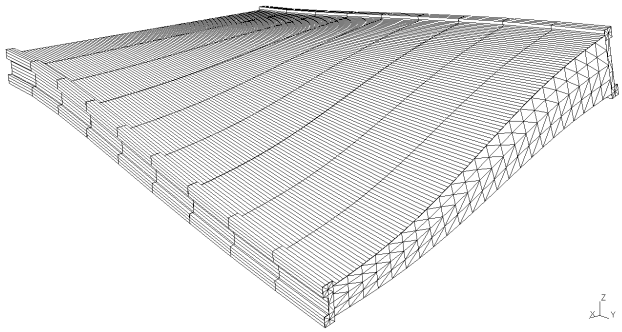


Figura 9.4. Modo di divergenza del tronco alare con centine. Modello TE di quinto ordine.

| | $V_D$ $[m/s]$ | $DOFs$ |
|---|---|---|
| EBBM | $6.5 \times 10^9$ | 495 |
| TBM | $3.2 \times 10^8$ | 495 |
| $N = 1$ | 5592.4 | 495 |
| $N = 2$ | 1431.2 | 990 |
| $N = 3$ | 1395.2 | 1650 |
| $N = 4$ | 1064.1 | 2070 |
| $N = 5$ | 752.9 | 2331 |
| $N = 6$ | 562.4 | 2352 |

Tabella 9.6. Velocità di divergenza e numero di gradi di libertà per i modelli TE implementati. Tronco alare senza centine.

al numero dei gradi di libertà coinvolto nel calcolo.
Questa tabella mostra ancora una volta che i modelli di ordine minore di $N = 5$ non riescono a prevedere correttamente l'assenza delle centine nella struttura e, di conseguenza, mostrano risultati analoghi alla configurazione con centine. Solo analisi di modelli ancora più rifiniti mostrano il corretto funzionamento del tronco in assenza degli irrigidimenti trasversali e le conseguenti importanti deformazioni della sezione trasversale.
In Fig. 9.5 viene mostrato il modo di divergenza statica per il modello strutturale del tronco alare senza centine secondo l'analisi TE di quinto ordine.
Infine, in Fig. 9.6 viene graficato l'andamento della velocità critica al variare del modello implementato, sia per la configurazione con centine che senza centine.

Figura 9.5. Modo di divergenza del tronco alare senza centine. Modello TE di quinto ordine.

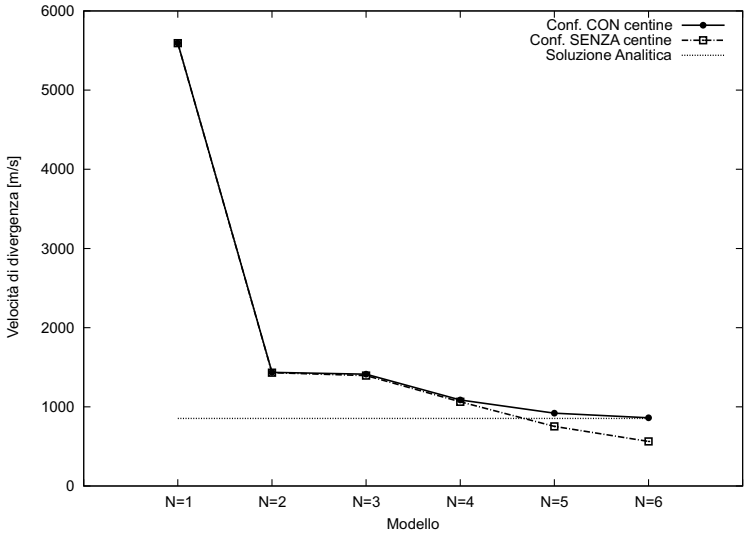



Figura 9.6. Andamento della velocità di divergenza al variare del modello TE.

# Capitolo 10

# Conclusioni e Sviluppi Futuri

Negli ultimi anni il Professor Carrera e i suoi collaboratori hanno messo a disposizione della comunità un consistente numero di articoli riguardanti i modelli CUF. I risultati presenti in letteratura hanno dimostrato, attraverso molti test ed analisi, la buona affidabilità di questi avanzati metodi di calcolo di strutture, evidenziandone pregi e difetti.
Il lavoro svolto in questa tesi rappresenta uno dei primi tentativi di applicazione dei nostri modelli, recentemente definiti modelli *component-wise*, a strutture tipicamente aerospaziali.
Le strutture a guscio rinforzato costituiscono la quasi totalità dell'*airframe* e metodi di calcolo sempre più veloci ed affidabili sono richiesti per analisi strutturali e multicampo di vario tipo, al fine di ottimizzare sia i costi del progetto (ridotti tempi di analisi) che i costi di servizio (strutture ottimizzate e quindi più leggere) riducendo i consumi.
A tal proposito si pensi all'importanza che i materiali compositi hanno assunto in campo aerospaziale negli ultimi anni. I modelli CUF si prestano in maniera ottimale all'implementazione di strutture laminate multistrato. L'approccio *Layer Wise* permette di considerare ogni singolo strato del laminato come componente a se stante, e utilizzando modelli *Lagrange Expansion - based* siamo in grado di evitare l'omogeneizzazione delle proprietà di ogni singolo strato, ottenendo risultati praticamente analoghi a quelli ricavabili da modelli ben più complessi, pesanti e lenti.
La possibilità inoltre di modellizzare con un solo elemento *Lagrange-type* la singola fibra annegata in una matrice rende questi modelli estremamente interessanti e schiude innumerevoli spunti di studio che saranno sicuramente affrontati nel futuro prossimo.
Tornando ai risultati ottenuti durante questo lavoro, non possiamo che essere soddisfatti. Le analisi statiche hanno dimostrato l'estrema affidabilità dei modelli CUF alle prese con le strutture oggetto di studio.
La possibilità di innalzare l'ordine dei modelli TE fa si che questi non siano soggetti

alle limitazioni imposte dalle ipotesi fondamentali delle teorie classiche. Non solo fenomeni flessionali, ma anche torsionali sono correttamente previsti per ordini di espansione sufficientemente elevati.
Abbiamo apprezzato come i modelli *component-wise* siano in grado di prevedere correttamente gli effetti di irrigidimenti trasversali, restituendo risultati praticamente analoghi a quelli offerti dal codice commerciale NASTRAN©. Quest'ultima analisi ha inoltre dimostrato, implicitamente, la loro capacità di analizzare travi ad allungamento estremamente basso (minore di 1 nel particolare caso considerato).
Lo studio del tronco alare se da una parte ha confermato le conclusioni già dettate dallo studio precedente e aggiunto poco altro, ovvero la possibilità di studiare gli effetti della presenza di aperture e/o porte, dall'altra ha suscitato nuove idee che sicuramente verranno analizzate a breve. Una struttura civile non è molto diversa dal tronco analizzato: i pilastri prenderebbero il posto dei correnti, i solai delle centine e le pareti sottili sarebbero rimpiazzate dai muri.
Attualmente le strutture civili sono progettate tramite codici FEM, facendo ampio uso sia di elementi monodimensionali che bidimensionali che, talvolta, di elementi solidi. Abbiamo tutti gli elementi per poter dire che l'utilizzo dei modelli CUF in questo campo dell'ingegneria potrebbe dimostrasi molto efficace.
Un'altra importante conclusione che emerge dall'analisi statica è la superiorità dei modelli LE nei confronti dei modelli TE quando si trattano strutture in parete sottile. Questo risultato riaffiora anche dall'analisi dinamica non smorzata, dove sono solo i modelli *Lagrange Expansion - based* a prevedere correttamente i modi locali, che tipicamente si presentano sotto forma di modi *shell*.
L'analisi modale, ad esempio, del cassone rettangolare mostra come i modelli TE fanno talvolta fatica a seguire i risultati offerti da NASTRAN©, mentre i modelli LE ne restituiscono un ottima corrispondenza. Oltre ai modi locali, questi modelli prevedono correttamente tutti i modi principali che interessano la struttura e non solo i modi tipicamente attribuiti a strutture trave, ma anche modi torsionali e, nel caso senza centina al *tip*, modi atipici come quello flessional-differenziale.
Infine, l'analisi dinamica del tronco alare mostra tutta la potenza di questi modelli. La configurazione senza centine e quella con apertura sul ventre non mostra un ottima corrispondenza tra modelli TE e LE. Questi ultimi sono in grado di prevedere comportamenti della struttura che sarebbero impossibili da studiare con modelli trave, come la flessione alternata di uno o dell'altro longherone. Questi risultati sono altrimenti prevedibili solo con modelli 3D e quindi, con un consistente aumento del numero dei gradi di libertà.
Dopo aver validato il modello strutturale, l'analisi aeroelastica voleva dimostrare l'applicabilità dei modelli FE basati sulla formulazione unificata della trave a problemi multicampo e, in particolare, a fenomeni di accoppiamento fluido-struttura.
La teoria aerodinamica implementata risulta, forse, la più semplice e banale possibile. Si tratta di una teoria stazionaria che talvolta, grazie ad opportune correzioni,

può essere ampliata per trattare fenomeni quasi-stazionari.
Mentre per il caso della divergenza statica la *Strip Theory* si è dimostrata sufficientemente valida, lo stesso non può dirsi per lo studio dei fenomeni di flutter. Questi infatti sono processi strettamente instazionari.
Recentemente sono stati implementati metodi fluidodinamici computazionali più complessi e completi per l'analisi di fenomeni aeroelastici nell'ambito del modello strutturale CUF. Questi sono il *Vortex Lattice Method* (VLM) e il *Doublet Lattice Method* (DLM).
Il VLM modella le superfici portanti come una lamina infinitamente sottile composta da vortici discreti al fine di calcolare portanza e resistenza. L'influenza dello spessore viene trascurata, mentre il fluido è considerato incompressibile, inviscido e irrotazionale. Ciononostante, questo metodo ha offerto ottimi risultati, documentati, di analisi statiche sotto carico aerodinamico per svariate configurazioni alari.
Viceversa il DLM si basa sulla teoria linearizzata del potenziale aerodinamico e rappresenta una estensione del VLM. Viene utilizzato, ormai globalmente, per lo studio dei fenomeni di flutter e analisi di risposta dinamica ed ha offerto ottimi risultati anche applicato a modelli CUF.
L'unico rammarico risiede nel fatto di non essere riuscito a perfezionare, per motivi di tempo, il codice di calcolo per analisi di flutter con la *Strip Theory*. In letteratura sono presenti, tuttavia, molti documenti che dimostrano la scarsa applicabilità della teoria di stiscia in questo contesto e a chi potrebbe vedere in questa mia mancanza una forma di sconfitta o a chi dovesse imbattersi in eventuali errori presenti all'interno di questo lavoro rispondo concludendo con una citazione del noto, visionario, matematico Britannico Alfred North Whitehead, il quale nel suo *"La scienza e il mondo moderno"* scrive:

*"Nella logica formale una contraddizione è il segno della sconfitta,*

*ma nell'evoluzione della vera conoscenza è il primo passo verso una vittoria."*

# Appendice A

# Funizoni di Forma

$$r = \frac{2\,(y - y_1) - L}{L}$$

$$\begin{array}{ll} N_i = 1 & se\ r = r_i \\ N_i = 0 & altrimenti \end{array}$$

## A.1 Elemento B2

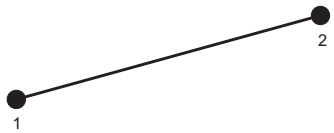



Figura A.1. Elemento B2 (2 Nodi).

$$N_1 = c_{21}\,(r - 1)$$

$$N_2 = c_{22}\,(r + 1)$$

$$c_{21} = -\frac{1}{2} \qquad c_{22} = +\frac{1}{2}$$

$$N_1 = -\tfrac{1}{2}\,r + \tfrac{1}{2}$$

$$N_2 = +\tfrac{1}{2}\,r + \tfrac{1}{2}$$

## A.2 Elemento B3

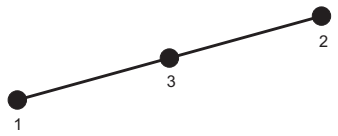



Figura A.2. Elemento B3 (3 Nodi).

$$N_1 = c_{31}\ r\ (r-1)$$

$$N_2 = c_{32}\ r\ (r+1)$$

$$N_3 = c_{33}\ (r+1)\ (r-1)$$

$$c_{31} = \frac{1}{2} \qquad c_{32} = \frac{1}{2} \qquad c_{33} = -1$$

$$N_1 = +\tfrac{1}{2}\ r^2 - \tfrac{1}{2}\ r$$

$$N_2 = +\tfrac{1}{2}\ r^2 + \tfrac{1}{2}\ r$$

$$N_3 = -\tfrac{1}{2}\ r^2 + 1$$

## A.3 Elemento B4

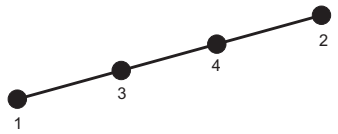



Figura A.3. Elemento B4 (4 Nodi).

$$N_1 = c_{41}\ (r+\tfrac{1}{3})\ (r-\tfrac{1}{3})\ (r-1)$$

$$N_2 = c_{42}\ (r+1)\ (r+\tfrac{1}{3})\ (r-\tfrac{1}{3})$$

$$N_3 = c_{43}\ (r+1)\ (r-\tfrac{1}{3})\ (r+\tfrac{1}{3})$$

$$N_4 = c_{44}\ (r+1)\ (r+\tfrac{1}{3})\ (r-1)$$

$$c_{41} = -\frac{9}{16} \qquad c_{42} = +\frac{9}{16} \qquad c_{43} = +\frac{27}{16} \qquad c_{44} = -\frac{27}{16}$$

$$N_1 = -\tfrac{9}{16}\, r^3 + \tfrac{9}{16}\, r^2 + \tfrac{1}{16}\, r - \tfrac{1}{16}$$

$$N_2 = +\tfrac{9}{16}\, r^3 + \tfrac{9}{16}\, r^2 - \tfrac{1}{16}\, r - \tfrac{1}{16}$$

$$N_3 = +\tfrac{27}{16}\, r^3 - \tfrac{9}{16}\, r^2 - \tfrac{27}{16}\, r + \tfrac{9}{16}$$

$$N_4 = -\tfrac{27}{16}\, r^3 - \tfrac{9}{16}\, r^2 + \tfrac{27}{16}\, r + \tfrac{9}{16}$$

# Appendice B

# Componenti dei Nuclei Fondamentali

## B.1 Matrice di Rigidezza

Le nove componenti del nucleo fondamentale della matrice di rigidezza sono definite di seguito:

$$
\begin{aligned}
K_{xx}^{ij\tau s} = \; & \tilde{C}_{22} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,x} d\Omega \int_{l} N_i N_j dy + \tilde{C}_{66} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s} d\Omega \int_{l} N_{i,y} N_{j,y} dy + \\
& \tilde{C}_{44} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,z} d\Omega \int_{l} N_i N_j dy + \tilde{C}_{26} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s} d\Omega \int_{l} N_i N_{j,y} dy + \\
& \tilde{C}_{26} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,x} d\Omega \int_{l} N_{i,y} N_j dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{xy}^{ij\tau s} = \; & \tilde{C}_{66} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,x} d\Omega \int_{l} N_{i,y} N_j dy + \tilde{C}_{45} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,z} d\Omega \int_{l} N_i N_j dy + \\
& \tilde{C}_{23} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s} d\Omega \int_{l} N_i N_{j,y} dy + \tilde{C}_{36} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s} d\Omega \int_{l} N_{i,y} N_{j,y} dy + \\
& \tilde{C}_{26} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,x} d\Omega \int_{l} N_i N_j dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{xz}^{ij\tau s} = \; & \tilde{C}_{45} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s} d\Omega \int_{l} N_i N_{j,y} dy + \tilde{C}_{12} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,z} d\Omega \int_{l} N_i N_j dy + \\
& \tilde{C}_{16} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,z} d\Omega \int_{l} N_{i,y} N_j dy + \tilde{C}_{44} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,x} d\Omega \int_{l} N_i N_j dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{yx}^{ij\tau s} = \; & \tilde{C}_{66} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s} d\Omega \int_{l} N_i N_{j,y} dy + \tilde{C}_{45} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,z} d\Omega \int_{l} N_i N_j dy + \\
& \tilde{C}_{23} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,x} d\Omega \int_{l} N_{i,y} N_j dy + \tilde{C}_{36} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s} d\Omega \int_{l} N_{i,y} N_{j,y} dy + \\
& \tilde{C}_{26} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,x} d\Omega \int_{l} N_i N_j dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{yy}^{ij\tau s} = \; & \tilde{C}_{66} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,x} d\Omega \int_{l} N_i N_j dy + \tilde{C}_{36} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_s d\Omega \int_{l} N_i N_{j,y} dy + \\
& \tilde{C}_{36} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,x} d\Omega \int_{l} N_{i,y} N_j dy + \tilde{C}_{55} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,z} d\Omega \int_{l} N_i N_j dy + \\
& \tilde{C}_{33} \int_{\Omega} F_{\tau} F_s d\Omega \int_{l} N_{i,y} N_{j,y} dy \\
K_{yz}^{ij\tau s} = \; & \tilde{C}_{45} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,x} d\Omega \int_{l} N_i N_j dy + \tilde{C}_{55} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_s d\Omega \int_{l} N_i N_{j,y} dy + \\
& \tilde{C}_{13} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,z} d\Omega \int_{l} N_{i,y} N_j dy + \tilde{C}_{16} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,z} d\Omega \int_{l} N_i N_j dy \\
K_{zx}^{ij\tau s} = \; & \tilde{C}_{45} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,z} d\Omega \int_{l} N_{i,y} N_j dy + \tilde{C}_{12} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,x} d\Omega \int_{l} N_i N_j dy + \\
& \tilde{C}_{16} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_s d\Omega \int_{l} N_i N_{j,y} dy + \tilde{C}_{44} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,z} d\Omega \int_{l} N_i N_j dy \\
K_{zy}^{ij\tau s} = \; & \tilde{C}_{45} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,z} d\Omega \int_{l} N_i N_j dy + \tilde{C}_{55} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,z} d\Omega \int_{l} N_{i,y} N_j dy + \\
& \tilde{C}_{13} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_s d\Omega \int_{l} N_i N_{j,y} dy + \tilde{C}_{16} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,x} d\Omega \int_{l} N_i N_j dy \\
K_{zz}^{ij\tau s} = \; & \tilde{C}_{55} \int_{\Omega} F_{\tau} F_s d\Omega \int_{l} N_{i,y} N_{j,y} dy + \tilde{C}_{11} \int_{\Omega} F_{\tau,z} F_{s,z} d\Omega \int_{l} N_i N_j dy + \\
& \tilde{C}_{45} \int_{\Omega} F_{\tau} F_{s,x} d\Omega \int_{l} N_{i,y} N_j dy + \tilde{C}_{45} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_s d\Omega \int_{l} N_i N_{j,y} dy + \\
& \tilde{C}_{44} \int_{\Omega} F_{\tau,x} F_{s,x} d\Omega \int_{l} N_i N_j dy
\end{aligned}
$$

## B.2 Matrice delle Masse

Le nove componenti del nucleo fondamentale della matrice delle masse sono:

$$\mathbf{M}_{xx}^{ij\tau s} = \mathbf{M}_{yy}^{ij\tau s} = \mathbf{M}_{zz}^{ij\tau s} = \rho \int_l N_i N_j dy \int_{\Omega} F_{\tau} F_s d\Omega$$

$$\mathbf{M}_{xy}^{ij\tau s} = \mathbf{M}_{xz}^{ij\tau s} = \mathbf{M}_{yx}^{ij\tau s} = \mathbf{M}_{yz}^{ij\tau s} = \mathbf{M}_{zx}^{ij\tau s} = \mathbf{M}_{zy}^{ij\tau s} = 0$$

dove $\rho$ è la densità del materiale cui è composta la struttura, supposta costante.

# Bibliografia


[1] Bathe K., *"Finite Element Procedure"*, Prentice Hall, 1996.

[2] Carrera E., *"Fondamenti sul Calcolo di Strutture a Guscio Rinforzato per Veicoli Aerospaziali"*, Levrotto & Bella, 2011.

[3] Carrera E., *"Theories and finite elements for multylayered, anisotropic, composite plates and shells"*, Archives of Computazional Methods in Engineering 9(2):87-140, 2002.

[4] Carrera E., *"Theories and finite elements for multylayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking"*, Archives of Computazional Methods in Engineering 10(3):216-296, 2003.

[5] Carrera E., Brischetto S., *"Analysis of thickness locking in classical, refined and mixed multilayered plate theory"*, Composite Structures 82(4):549-562, 2008.

[6] Carrera E., Giunta G., *"Refined beam theories based on Carrera's unified formulation"*, International Journal of Applied Mechanics 2(1):117-143, 2010.

[7] Carrera E., Giunta G., Nali P., Petrolo M., *"Refined beam elements with arbitrary cross-section geometries"*, Computers and Structures 88(5-6):283-293, 2010.

[8] Carrera E., Petrolo M., *"On the Effectiveness of Higher-Order Terms in Refined Beam Theories"*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 78, 2011.

[9] Carrera E., Petrolo, M., *"Refined Beam Elements with only Displacement Variables and Plate/Shell Capabilities"*, In Press, 2011.

[10] Carrera E., Petrolo M., Nali P., *"Unified formulation applied to free vibrations finite element analysis of beams with arbitrary section"*, Shock and Vibrations, In Press.

[11] Carrera E., Petrolo M., Wenzel C., Giunta G., Belouettar S., *"Higher order beam finite elements with only displacements degrees of freedom"*, Atti del XIX Congresso AIMETA, pp. 1-11, 2009.

[12] Carrera E., Petrolo M., Varello A., *"Advanced beam formulations for free vibration analysis of conventional and joined wings"*, Journal of Aerospace Engineering, In Press.

[13] Carrera E., Petrolo M., Zappino E., *"Analysis of thin-walled structures with longitudinal and transversal stiffeners"*, Journal of Applied Mechanics, In Press, 2011.

[14] Carrera E., Petrolo M., Zappino E., *"Advanced elements for the static analysis of beams with compact and bridge-like sections"*, Journal of Structural Engineering, In Press.

[15] Dinis P., Camotim D., Silvestre N, *"GBT formulation to analyse the buckling behaviour of thin-walled members with arbitrary branched open cross-sections"*, Thin-Walled Structures 44:20-38, 2006.

[16] Dong E. Taciroglu S.B., Alpdogan C., *"Much ado about shear correction factors in Timoshenko beam theory"*, International Journal of Solids and Structures 47:1651-1665, 2010.

[17] Eisenberger M., *"An exact high order beam element"*, Computers and Structures 81:147-152, 2003.

[18] El Fatmi R., *"Non-uniform warping including the effects of torsion and shear forces. Part I: A general beam theory"*, International Journal of Solids and Structures 44:5912-5929, 2007.

[19] El Fatmi R., *"Non-uniform warping including the effects of torsion and shear forces. Part II: Analytical and numerical applications"*, International Journal of Solids and Structures 44:5930-5952, 2007.

[20] Euler L., *"De curvis elasticis"*, Louisiana e Ginevra, Bousquet, 1744.

[21] Hodges D.H., Pierce G.A., *"Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity"*, Cambridge University Press, 2002.

[22] Kaneko T., *"On Timoshenko's correction for shear in vibrating beams"*, Journal of Physics D 8:1927-1936, 1975.

[23] Kapania K., Raciti S., *"Recent advances in analysis of laminated beams and plates, part I: Shear effects amd buckling"*. AIAA Journal 27(7):923-935, 1989.

[24] Kapania K., Raciti S., *"Recent advances in analysis of laminated beams and plates, part II: Vibration and wave propagation"*. AIAA Journal 27(7):935-946, 1989.

[25] Gruttmann F., Sauer R., Wagner W., *"Shear stresses in prismatic beams with arbitraty cross-sections"*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 45:865-889, 1999.

[26] Gruttmann F., Wagner W., *"Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross-sections"*, Computational Mechanics 27:199-207, 2001.

[27] Jönsson J., *"Distorsional theory of thin-walled beams"*, Thin-Walled Structures, 33:269-303, 1999.

[28] Megson T. H. J., *"Aircraft Structures for Enginnering Students"*, Edward Anrnold (Publishers) Ltd, 1972.

[29] Novozhilov V.V., *"Theory of elasticity"*, Pergamon Press, 1961.

[30] Oñate E., *"Structural Analysis with the Finite Element Method: Linear Statics"*, Vol. 1, 2009.

[31] Petrolito J., *"Stiffeners analysis of beam using a higer-order theory"*, Computers and Structures 55(1):33-39, 1995.

[32] Reddy J.N., *"On locking-free shear deformable beam finite elements"*, Computer methods in applied mechanics and engineering 149:113-132.

[33] Reddy J.N., *"Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and Analysis"*, CRC Press, 2nd edn., 2004.

[34] Rendek S., Baláž I., *"Distorsion of thin-walled beams"*, Thin-Walled Structures 42:255-277, 2004.

[35] Rivello R.M., *"Theory and analysis of flight structures"*, McGraw-Hill, 1969.

[36] Saadé K., Espion B., Warzée G., *"Non-uniform torsional behaviour and stability of thin-walled beams"*, Thin-Walled Structures 42:255-277, 2004.

[37] Silvestre N., *"Generalized beam thery to analyse the buckling behaviour of circular cylindrical shells and tubes"*, Thin-Walled Structures 45:185-198, 2007.

[38] Timoshenko S.P., Goodier J.N., *"Theory of elasticity"*, McGraw-Hill, 1970.

[39] Timoshenko S.P., *"On the corrections for shear of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars"*, Philosophical Magazine 41:744-746, 1921.

[40] Timoshenko S.P., *"On the transverse vibrations of bars of uniform cross section"*, Philosophical Magazine 43:125-131, 1922.

[41] Tsai S.W., *"Composite Design"*, 4th edn. Dayton, Think Composites, 1988.

[42] Vinayak R.U., Prathap G., Naganarayana B.P., *"Beam elements based on a higer order theory - I. Formulation and analysis of performance"*, Computers and Structures 58(4):775-789, 1996.

[43] Wagner W., Gruttmann F., *"A displacement method for the analysis of flexural shear stresses in thin-walled isotropic composite beams"*, Computers and Structures 80:1843-1851, 2002.

[44] Yu W., Hodges D.H., *"Elasticity solution versus asymptotic sectional analysis of homogeneous, isotropic, prismatic beams"*, Journal of Applied Mechanics 71:15-23, 2004.

[45] Yu W., Volovoi V.V., Hodges D.H., Hong X., *"Validation of the variational asymptotic beam sectional analysis (VABS)"*, AIAA Journal 40:2105-2113, 2002.