AERODINAMICA DEI SISTEMI PORTANTI CHIUSI: ALA ANULARE ELLITTICA

L.DEMASI, G.CHIOCCHIA, E.CARRERA

Dipartimento di Ingegneria Aeronautica e Spaziale,
Politecnico di Torino, Torino

SOMMARIO

Viene studiata la distribuzione di carico aerodinamico che si sviluppa su un'ala chiusa avente contorno anulare ellittico. Il problema si traduce matematicamente in un'equazione integrale a nucleo ipersingolare (parte finita di Hadamard), risolta per differenti valori del rapporto fra il semiasse minore a_w ed il semiasse maggiore b_w dell'ellisse. Appare che al *diminuire* del rapporto a_w/b_w , la resistenza indotta, per un calettamento unitario, *aumenta* .

1. INTRODUZIONE

Negli ultimi anni si è sviluppato un crescente interesse per configurazioni aeronautiche innovative. Infatti nuove esigenze si sono presentate ai progettisti: incrementare considerevolmente il carico pagante (e dunque la portanza) fissando un limite all'apertura alare massima. Requisiti ai quali si accompagna la necessità della minimizzazione della resistenza indotta e dunque della spinta necessaria [1]. Lo sviluppo nell'impiego ed utilizzo di nuovi materiali, il forte incremento delle capacità di calcolo e il progresso nelle tecniche di controllo hanno permesso l'attuale rivalutazione di alcune ipotesi di configurazione studiate in passato ma abbandonate per alcuni problemi aeroelastici, oggi risolvibili mediante l'impiego dei moderni materiali compositi. Tra queste configurazioni alari spicca il biplano ad ali congiunte proposto da L. Prandtl fin dal 1924 [2] che ha la proprietà di realizzare la minima resistenza indotta. Coi nomi di Prandtlplane [3], boxplane wing o joined wing [4] l'idea di congiungere le ali proposta da Prandtl nel 1924, è stata ripresa negli anni '70 ed '80 in vista dell'applicazione a grandi aerei da trasporto, nei quali gli effetti economici della riduzione della resistenza indotta dovuta alla scomparsa dei vortici d'estremità alare sarebbero particolarmente percepibili.

Di tutti i sistemi alari chiusi quello circolare è sicuramente il più elementare. Cionostante esso è grado di evidenziare la particolare struttura matematica del problema della determinazione dell'andamento della circolazione lungo il contorno chiuso dell'ala e di condurre a semplici risultati di riferimento. Come tale, esso è stato oggetto di una memoria presentata ad un precedente Congresso AIDAA [5]. Sul versante opposto, quello della modellizzazione numerica di un caso applicativo, uno studio presentato ad un congresso ancora precedente [6] aveva dimostrato le potenzialità aeroelastiche della configurazione.

La configurazione circolare, tuttavia, non permette di apprezzare l'effetto del rapporto tra apertura alare e altezza del box sulle prestazioni aerodinamiche, essendo le due dimensioni necessariamente identiche. Quest'analisi può invece essere svolta studiando un'ala chiusa anulare ellittica in vista frontale, anzichè circolare: il rapporto dei semiassi rappresenta allora il parametro fondamentale le cui variazioni vanno correlate alla portanza complessiva del sistema ed alla sua resistenza indotta. Questo studio, qui ripreso ed approfondito può essere consultato nel lavoro [7].

Come modello aerodinamico si è adottato quello di un segmento portante collocato sul luogo dei quarti anteriori delle corde alari con intensità tale da permettere il soddisfacimento della condizione di tangenza sul luogo dei quarti posteriori. Il segmento portante è modellato tramite una distribuzione di dipoli di pressione (metodo del potenziale delle accelerazioni [8]) ed il problema matematico si traduce in un'equazione integrale a nucleo ipersingolare, analizzata introducendo il concetto di parte finita di Hadamard [9]. A differenza del caso studiato in [5], dove il problema era trattabile entro un sistema di coordinate polari, ora si rende necessario l'uso di coordinate ellittiche, ciò che conduce ad un termine regolare nell'equazione risolvente dotato di struttura più complessa.

2. MODELLO AERODINAMICO

Indicata con x la direzione assiale, parallela alla direzione del vento V_∞, l'ala è rappresentata da un'ellisse nel piano $x = 0$ con semiassi b_w, a_w lungo le direzioni y e z rispettivamente. Nell'ipotesi che il rapporto fra il semiasse minore a_w e la corda alare l (supposta costante) sia sufficientemente elevato, il comportamento aerodinamico dell'ala è riconducibile a quello di una linea portante ellittica. In tale situazione, è opportuno utilizzare un sistema di coordinate x, φ, ψ legato a quelle cartesiane dalle relazioni:

$$\begin{aligned} y &= c \cosh\psi \cos\varphi \qquad & 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ z &= c \sinh\psi \sin\varphi \qquad & \psi > 0, \end{aligned} \tag{1}$$

dove c è un fattore metrico. Si verifica facilmente che in tale sistema di coordinate, le curve $\varphi =$ costante sono iperboli, mentre le $\psi =$ costante sono ellissi e che nelle loro intersezioni l'angolo fra le tangenti è retto. Contrassegnando col pedice w i valori delle grandezze letti in corrispondenza dell'ala anulare ellittica, si deduce dalla (1):

$$\begin{aligned} a_w &= c \sinh \psi_w, \\ b_w &= c \cosh \psi_w, \\ c^2 &= b_w^2 - a_w^2, \\ \cosh^2 \psi_w &= b_w^2/(b_w^2 - a_w^2). \end{aligned}$$

Lo studio è impostato usando il potenziale delle accelerazioni di una distribuzione di dipoli, per cui si rende necessario il calcolo preliminare della distanza cartesiana di un generico punto $P(x, y, z)$ dello spazio da un qualsiasi punto dell'ellisse identificativa dell'ala e dove è posizionato il generico dipolo. Si ha perciò:

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{x^2 + (y - y_d)^2 + (z - z_d)^2} = \\ &= c\sqrt{X^2 + (\cosh \psi \cos \varphi - \cosh \psi_w \cos \varphi_d)^2 + (\sinh \psi \sin \varphi - \sinh \psi_w \sin \varphi_d)^2}, \end{aligned}$$

dove:

$$X = \frac{x}{c}; \qquad 0 \leq \varphi_d \leq 2\pi.$$

Per dedurre il potenziale cercato, è possibile partire dal potenziale delle accelerazioni $\Psi_s(X, \psi, \varphi, \psi_w)$ di una distribuzione $q(s_d)$ di sorgenti posizionate sul perimetro dell'ellisse (s indica qui la coordinata curvilinea sull'ala ed il pedice d sta ad indicare che in tale punto è presente una doppietta):

$$\Psi_s(X, \psi, \varphi, \psi_w) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\text{ellisse}} \frac{q(s_d)}{D} \, \mathrm{d}s_d = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q(\varphi_d)}{D} \, \mathrm{d}\varphi_d. \qquad (2)$$

L'espressione del potenziale delle accelerazioni $\Psi(X, \psi, \varphi, \psi_w)$ di una distribuzione $m(\varphi_d)$ [m^3/s^2] di dipoli posti sull'ala con asse perpendicolare all'ellisse e diretto verso l'origine del riferimento (x, y, z) è facilmente ricavabile mediante un'operazione formale di derivata direzionale operata sulla (2). Qui si preferisce partire direttamente dalla relazione del potenziale di un dipolo M con asse orientato secondo una direzione di *coseni direttori* n_{dx}, n_{dy}, n_{dz} e posizionato nel punto di coordinate x_d, y_d, z_d. Perciò, indicate con x, y, z le coordinate del generico punto dello spazio dove si calcola il potenziale, si può dimostrare ([10]) facilmente la relazione:

$$\psi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} M \frac{n_{dx}(x - x_d) + n_{dy}(y - y_d) + n_{dz}(z - z_d)}{\left[(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2 + (z - z_d)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \qquad (3)$$

Senza entrare nel merito dei passaggi analitici [11], scrivendo la retta tangente all'iperbole individuata da $\varphi = \varphi_d$ (e passante dunque per il punto in cui si trova la doppietta), si ricavano facilmente le componenti del vettore unitario perpendicolare all'ellisse in detto punto e orientato verso l'interno[1] sono pertanto:

$$\mathbf{n}_d = -\frac{\cos\varphi_d \sinh\psi_w}{\sqrt{\cosh^2\psi_w - \cos^2\varphi_d}}\,\mathbf{j} - \frac{\sin\varphi_d \cosh\psi_w}{\sqrt{\cosh^2\psi_d - \cos^2\varphi_d}}\,\mathbf{k}. \tag{4}$$

Ed è facile verificare che è orientata verso l'interno come l'asse dei dipoli. Dalla relazione precedente, si deduce che:

$$\begin{aligned} n_{dx} &= 0, \\ n_{dy} &= -\frac{\cos\varphi_d \sinh\psi_w}{\sqrt{\cosh^2\psi_w - \cos^2\varphi_d}}, \\ n_{dz} &= -\frac{\sin\varphi_d \cosh\psi_w}{\sqrt{\cosh^2\psi_w - \cos^2\varphi_d}}. \end{aligned}$$

Il potenziale delle accelerazioni dovuto ad un dipolo $M = m(s_d)\,\mathrm{d}s_d$ con asse diretto perpendicolarmente all'ellisse e verso l'interno, posizionato in $x_d = 0, y_d, z_d$ vale allora:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Psi(x,\psi,\varphi,\psi_w) &= \tfrac{m(\varphi_d)\mathrm{d}\varphi_d}{4\pi c}\cdot \\ &\cdot\frac{\cos\varphi_d \sinh\psi_w(\cosh\psi\cos\varphi - \cosh\psi_w\cos\varphi_d) + \sin\varphi_d\cosh\psi_w(\sinh\psi\sin\varphi - \sinh\psi_w\sin\varphi_d)}{\left[X^2 + (\cosh\psi\cos\varphi - \cosh\psi_w\cos\varphi_d)^2 + (\sinh\psi\sin\varphi - \sinh\psi_w\sin\varphi_d)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Dove si sono usate le relazioni[2]:

$$\begin{aligned} x_d &= 0, \\ y_d &= c\cosh\psi_w\cos\varphi_d, \\ z_d &= c\sinh\psi_w\sin\varphi_d, \\ y &= c\cosh\psi\cos\varphi, \\ z &= c\sinh\psi\sin\varphi, \\ \mathrm{d}s_d &= c\sqrt{\cosh^2\psi_w - \cos^2\varphi_d}\,\mathrm{d}\varphi_d. \end{aligned}$$

[1] Si ricorda che le iperboli sono perpendicolari alle ellissi in questo sistema di coordinate e che dunque il vettore tangente all'iperbole in un punto è anche perpendicolare all'ellisse.

[2] Si osservi che l'ala è nel piano $y - z$ e che dunque $x = x_d = 0$.

Dalla relazione (5), mediante alcune identità trigonometriche ed integrando su tutta l'ala, si arriva alla scrittura finale del potenziale delle accelerazioni:

$$\Psi\left(x,\psi,\varphi,\psi_w\right)=\frac{1}{8\pi c}\int_0^{2\pi} m\left(\varphi_d\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{\left(\sinh(\psi+\psi_w)\cos(\varphi-\varphi_d)-\sinh(\psi-\psi_w)\cos(\varphi+\varphi_d)-\sinh 2\psi_w\right)}{\left[X^2+\sinh^2\psi+\cos^2\varphi-\cosh(\psi-\psi_w)\cos(\varphi+\varphi_d)-\cosh(\psi+\psi_w)\cos(\varphi-\varphi_d)+\sinh^2\psi_w+\cos^2\varphi_d\right]^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\varphi_d. \tag{6}$$

A tale espressione si farà riferimento nel seguito.
La conoscenza della distribuzione $m(\varphi_d)$ è essenziale in quanto consente di ricavare facilmente la forza aerodinamica nella direzione degli assi dei dipoli e da questa la portanza complessiva sviluppata.

La determinazione di $m(\varphi_d)$ passa attraverso l'imposizione della condizione di tangenza nel luogo dei quarti posteriori delle corde alari (metodo di Pistolesi-Weissinger [12] [13]). A tal fine è necessario ricavare le componenti delle velocitè indotte dalla linea portante (nelle direzioni perpendicolari all'ala). Ciò può farsi se è noto il potenziale delle velocità $\Phi(X,\psi,\varphi,\psi_w)$, ricavabile dall'espressione:

$$\Phi(X,\psi,\varphi,\psi_w)=\frac{c}{V_\infty}\int_{-\infty}^{X}\Psi(\tau,\psi,\varphi,\psi_w)\,\mathrm{d}\tau. \tag{7}$$

L'equazione integrale nell'incognita $m(\varphi_d)$ è pertanto:

$$-\alpha(\varphi)=\frac{1}{cV_\infty}\frac{1}{\sqrt{\cosh^2\psi_w-\cos^2\varphi}}\left[\frac{\partial\Phi(X,\psi,\varphi,\psi_w)}{\partial\psi}\right]_{\substack{\psi=\psi_w\\ X=X_0}}. \tag{8}$$

dove: $X_0=l/2c$ e l'incidenza è considerata positiva quando i bordi d'attacco dei profili alari sono più distanti dei bordi di fuga dall'asse dell'ellisse (asse x). In appendice A è riportata l'espressione dello sviluppo completo della 8), mentre in appendice B sono riportati alcuni passaggi significativi per la risoluzione numerica dell'equazione integrale. Il trattamento dell'integrale ipersingolare (l'equazione (8) diviene singolare per $\varphi=\varphi_d$) è analizzato in appendice C.

2.1. Calcolo della portanza

Nella direzione perpendicolare all'ellisse la forza locale (positiva verso l'esterno) ha espressione:

$$F\left(\varphi_d\right)=-\left(-\rho m\left(\varphi_d\right)\right)=\rho m\left(\varphi_d\right).$$

Il modulo del seno dell'angolo compreso fra il vettore normale e l'asse y è:

$$|\sin\beta| = \frac{\cosh\psi_w\,|\sin\varphi_d|}{\sqrt{\cosh^2\psi_w - \cos^2\varphi_d}}.$$

In base a quanto visto la *portanza locale* (diretta secondo z) risulta:

$$L(\varphi_d) = F(\varphi_d)\sin\beta = \rho m(\varphi_d)\frac{\cosh\psi_w\sin\varphi_d}{\sqrt{\cosh^2\psi_w - \cos^2\varphi_d}}.$$

Il modulo è stato eliminato in quanto una distribuzione di dipoli positiva produce una forza lungo la direzione in cui la portanza è valutata nell'intervallo $0 \leq \pi$, viceversa nell'intervallo $\pi \leq 2\pi$. Pertanto, in base alle convenzioni assunte La *portanza complessiva* si ottiene per integrazione nel modo seguente:

$$L = \int_{ellisse} L(s_d)\,\mathrm{d}s_d,$$

e ricordando che $\mathrm{d}s_d = c\sqrt{\cosh^2\psi_w - \cos^2\varphi_d}\;\mathrm{d}\varphi_d$ si ha:

$$L = c\int_0^{2\pi} L(\varphi_d)\sqrt{\cosh^2\psi_w - \cos^2\varphi_d}\;\mathrm{d}\varphi_d = c\rho\cosh\psi_w\int_0^{2\pi} m(\varphi_d)\sin\varphi_d\;\mathrm{d}\varphi_d\;. \tag{9}$$

Cioè:

$$L = b_w\rho\int_0^{2\pi} m(\varphi_d)\sin\varphi_d\;\mathrm{d}\varphi_d\;. \tag{10}$$

Il coefficiente adimensionale di portanza riferito alla pianta alare $S = 4b_w l$ è infine:

$$C_L = \frac{2L}{\rho S V_\infty^2}. \tag{11}$$

2.2. Calcolo della resistenza indotta

È possibile calcolarla mediante considerazioni sull'energia cinetica della componente perpendicolare all'asse x (come per esempio svolto in [7]). Qui si preferisce ricorre ad una determinazione più semplice ed immediata, sfruttando l'ipotesi di lavoro che si è fatta sin'ora: piccole perturbazioni. Secondo questo approccio, ponendosi nel piano dell'ala ($X = 0$) essa è il prodotto fra la forza aerodinamica locale per la tangente dell'angolo d'incidenza indotta. In formule:

$$D_i(\varphi_d) = F(\varphi_d)\tan(\alpha_i(\varphi_d)) \simeq F(\varphi_d)\,\alpha_i(\varphi_d),$$

con:

$$F(\varphi_d) = -(-\rho m(\varphi_d)) = \rho m(\varphi_d).$$

L'incidenza indotta, sarà data dal rapporto tra la velocità indotta (considerata positiva verso l'esterno) e la velocità del fluido all'infinito a monte. Tradotto in formule:

$$\alpha_i(\varphi_d) = -\frac{[u_n(\varphi_d)]_{X=0}}{V_\infty},$$

con:

$$[u_n(\varphi)]_{X=0} = \left(\frac{1}{h}\frac{\partial\Phi(X,\psi,\varphi,\psi_w)}{\partial\psi}\right)_{\psi=\psi_w,\,X=0}. \tag{12}$$

La resistenza indotta varrà pertanto:

$$D_i = \int_{ellisse} F(s_d)\,\alpha_i(s_d)\,\mathrm{d}s_d. \tag{13}$$

Cioè:

$$D_i = \int_0^{2\pi} \rho c m(\varphi_d)\left(-\frac{[u_n(\varphi_d)]_{X=0}}{V_\infty}\right)\sqrt{\cosh^2\psi_w - \cos^2\varphi_d}\,\mathrm{d}\varphi_d. \tag{14}$$

Introducendo il coefficiente adimensionale di resistenza indotta:

$$C_{D_i} = \frac{c}{2b_w l V_\infty^2}\int_0^{2\pi} m(\varphi_d)\left(-\frac{[u_n(\varphi_d)]_{X=0}}{V_\infty}\right)\sqrt{\cosh^2\psi_w - \cos^2\varphi_d}\,\mathrm{d}\varphi_d. \tag{15}$$

3. VALUTAZIONI NUMERICHE E RISULTATI

In questa sezione si presenta lo studio dell'ala anulare ellittica sottoposta ad una rotazione rigida attorno all'asse y di un angolo Ω. Si indichi con $\mathbf{\Omega} = \Omega\mathbf{j}$ il vettore rappresentativo. Indicando con α l'angolo di cui deve ruotare la sezione alare e ricordando la convenzione di segno per cui le incidenze sono positive verso l'esterno, si deve avere:

$$\alpha = \Omega\frac{\cosh\psi_w \sin\varphi_d}{\sqrt{\cosh^2\psi_w - \cos^2\varphi_d}}. \tag{16}$$

Vista la delicatezza dell'analisi numerica delle equazioni [11], si dimostra prima la convergenza del metodo ed infine alcuni significativi risultati. In tutti i casi riportati risulta sempre assegnata una incidenza corrispondente ad una rotazione rigida attorno all'asse y, in accordo alla (16) con $\Omega = 1$, $\frac{b_w}{l} = 12$.

3.1. Convergenza numerica del metodo

La procedura usata per risolvere l'equazione integrale è basata sul metodo di collocazione. Pertanto nelle figure 2 e 3 si analizza la variazione della distribuzione di dipoli adimensionalizzata al variare di detto parametro. Si vede chiaramente che con 15-20 punti di collocazione la soluzione non cambia e che dunque si raggiunge la convergenza. Pertanto tutti i risultati della sezione 3.2 sono ricavati usando 20 punti di collocazione.

3.2. Risultati

Nella figura 4 si riporta un confronto fra l'ala anulare circolare (considerata come caso limite dell'ala anulare ellittica quando i due semiassi tendono ad essere uguali) e l'ala anulare ellittica. Si vede come i gradienti della quantità $\frac{m}{LV_\infty^2}$ sono maggiori nel caso dell'ellisse[3], facendo dedurre una maggiore intensità dei vortici di scia schiacciando l'ellisse e dunque una maggiore resistenza indotta. La cosa risulta più evidente nella figura 5, dove chiaramente *la resistenza indotta aumenta al diminuire del rapporto* $\frac{a_w}{b_w}$. Si può obiettare che questa analisi non dimostra l'effettivo peggioramento dell'aerodinamica dell'ala anulare ellittica all'aumentare dello schiacciamento di essa. Infatti si può asserire a supporto dell'obiezione, che i valori della resistenza indotta non sono confrontati a parità di portanza assegnata (o se si vuole di coefficiente, visto che l'area di riferimento in tutti i casi è la stessa). L'obiezione a stretto rigore è corretta. Ma se si osserva criticamente la figura 5, si ha una variazione del coefficiente di portanza da 4.63 a 4.92 (differenza: +6%). Ora, da un'analisi qualitativa, sapendo che la resistenza indotta dipende dal quadrato della portanza, ci si aspetterebbe un aumento percentuale del coefficiente di resistenza indotta di $\frac{4.92^2-4.63^2}{4.63^2} = 13\%$. In realtà dalla figura 5 esso è molto più marcato: il coefficiente di resistenza indotta passa da 0.28 a 0.39 (differenza: +39%). Dunque si può attribuire l'aumento del coefficiente di resistenza indotta non solo all'aumento di portanza, ma alle peggiorate condizioni aerodinamiche (maggiori gradienti di circolazione) che si verificano schiacciando l'ellisse. Il risultato mostrato nella figura 5 è molto più generale. Infatti nel lavoro [14] si dimostrerà che a parità di apertura alare, portanza e nelle condizioni ideali di minima resistenza indotta, schiacciando l'ellisse la resistenza indotta aumenta, in accordo a quanto analizzato da Frediani e Montanari in [3] e da Kroo in [1].

[3]Si ricorda che vale la relazione $\Gamma = \frac{m}{V_\infty}$, dunque i gradienti di circolazione sono strettamente correlati ai gradienti di m.

4. CONCLUSIONI

Si è mostrato come per una incidenza corrispondente ad una rotazione rigida, la resistenza indotta aumenta se l'ellisse viene schiacciata. L'analisi qui riportata non è probante. Per un'analisi rogorosa, si veda [11] e [14].

RINGRAZIAMENTI

Gli autori ringraziano il prof. G. Monegato per i preziosi suggerimenti sui problemi di carattere numerico incontrati in questo lavoro.

Riferimenti bibliografici

[1] Kroo I., "*Drag Due to Lift: Concepts for Prediction and Reduction*", Annual Reviews Fluid Mechanics Vol. 33, 2001 pp. 587-617

[2] Prandtl L., "*Induced drag of multiplanes*", NACA TN 182, 1924

[3] Frediani A., Montanari G., "*On the Prandtl best wing system*", in: A.Frediani, A.Miele (Eds.), Advanced design problems in aerospace engineering, Plenum Press, NY 2001

[4] Wolkovitch J., "*The joined wing aircraft: an overview*", Journal of Aircraft, n. 23, 1986

[5] Chiocchia G., "*Carichi aerodinamici e divergenza statica in un'ala anulare*", XV Congr. Naz. AIDAA, Torino 1999

[6] Chiocchia G., Carrera E., Spinello D., "*Risultati di un modello FEM per l'analisi aeroelastica di architetture alari non convenzionali*", XIV Congr. Naz. AIDAA, Napoli 1977

[7] Chiocchia G., Carrera E., Demasi L., "*Studio aerodinamico di un'ala anulare ellittica*", Conferenza AIDAA Palermo 24-28 Settembre 2001

[8] Prandtl L., "*Beitrag zur Theorie der tragenden Fläche*", ZAMM, Vol. 16, n.6, 1936, pp.360-361

[9] Monegato G., "*Numerical evaluation of hypersingular integrals*", Journal of Computational and Applied Mathematics 50 (1994) 9-31

[10] Quori F., "*Aerodinamica*", Levrotto & Bella Editore (Torino) 1998

[11] Demasi L., "*Studio Aerodinamico di Configurazioni Alari Innovative per Applicazioni Aeroelastiche*", Tesi di dottorato, in fase di elaborazione

[12] Pistolesi E., "*Betrachtungen über die gegenseitige Beeinflussung von Tragflügelsystemen*", in Gesammelte Vorträge der Hauptversammlung 1937 der Lilienthal-Gesellschaft, Berlin, 1937

[13] Weissinger, J, "*Über die Auftriebverteilung von Pfeilflügeln*", Forsch. Ber. d. Zentr. f. Wiss. Berichtswesen 1553, Berlin-Adlershof, 1942

[14] Demasi L., "*Ala anulare ellittica: distribuzione di circolazione di minima resistenza indotta* ", congresso AIDAA ROMA, 15-19 Settembre 2003

APPENDICE A - FORMA ESPLICITA DELL'EQUAZIONE INTEGRALE

In forma compatta la (8) può scriversi:

$$-\alpha(\varphi) = \frac{1}{8\pi c V_\infty^2} \frac{1}{\sqrt{(\cosh^2\psi_w - \cos^2\varphi)}} \fint_0^{2\pi} m(\varphi_d) \left([A]_{\psi=\psi_w, X=X_0} + [B]_{\psi=\psi_w, X=X_0} \right) \mathrm{d}\varphi_d \ ,$$

con:

$$[A]_{\psi=\psi_w, X=X_0} = \frac{X_0 \cosh^2\psi_w \sinh^2\psi_w (1-\cos(\varphi-\varphi_d))}{\left(\sinh^2\psi_w + \sin^2\frac{\varphi+\varphi_d}{2}\right)\left(X_0^2 + 2\left(\sinh^2\psi_w + \sin^2\frac{\varphi+\varphi_d}{2}\right)(1-\cos(\varphi-\varphi_d))\right)^{\frac{3}{2}}} ,$$

$$[B]_{\psi=\psi_w, X=X_0} = [B]^R_{\psi=\psi_w, X=X_0} + [B]^S_{\psi=\psi_w, X=X_0} \ ,$$

$$[B]^S_{\psi=\psi_w, X=X_0} = \frac{\cosh^2\psi_w \cos(\varphi-\varphi_d) - \cos\varphi\cos\varphi_d}{\left(\sinh^2\psi_w + \sin^2\frac{\varphi+\varphi_d}{2}\right)} \cdot f_I - \frac{\cosh(2\psi_w)}{\left(\sinh^2\psi_w + \sin^2\frac{\varphi+\varphi_d}{2}\right)} + \frac{2}{1-\cos(\varphi-\varphi_d)} ,$$

$$[B]^R_{\psi=\psi_w, X=X_0} = \frac{\sinh^2\psi_w \cosh^2\psi_w}{\left(\sinh^2\psi_w + \sin^2\frac{\varphi+\varphi_d}{2}\right)^2} \left(\frac{X_0}{\sqrt{X_0^2 + 2\left(\sinh^2\psi_w + \sin^2\frac{\varphi+\varphi_d}{2}\right)(1-\cos(\varphi-\varphi_d))}} + 1 \right) ,$$

$$f_I = \left(\frac{-2\left(\sinh^2\psi_w + \sin^2\frac{\varphi+\varphi_d}{2}\right)}{\left(X_0 + \sqrt{X_0^2 + 2\left(\sinh^2\psi_w + \sin^2\frac{\varphi+\varphi_d}{2}\right)(1-\cos(\varphi-\varphi_d))}\right)\sqrt{X_0^2 + 2\left(\sinh^2\psi_w + \sin^2\frac{\varphi+\varphi_d}{2}\right)(1-\cos(\varphi-\varphi_d))}} \right) .$$

Il termine $\frac{2}{1-\cos(\varphi-\varphi_d)}$ è il termine ipersingolare ed il corrispondente integrale va inteso come parte finita di Hadamard. Il simbolo

$$\fint$$

indica appunto che l'integrale va inteso secondo la parte finita di Hadamard.

APPENDICE B - SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE INTEGRALE

Col cambio di variabili:

$$\varphi_d = \pi(t+1), \qquad \varphi = \pi(s+1),$$

tutti gli integrali risultano estesi fra gli estremi [-1,1]. La nuova incognita $m(t)$ viene espressa in serie di polinomi di Legendre:

$$m(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k P_k(t). \tag{17}$$

L'equazione integrale viene allora collocata negli N zeri del polinomio P_N ottenendo un sistema in N equazioni nelle N incognite c_k. Risolto quest'ultimo, le c_k sostituite nella (17) permettono la ricostruzione della $m(t)$.

APPENDICE C - TRATTAMENTO DELL'INTEGRALE IPERSINGOLARE

Nelle variabili (t, s) tale integrale si riscrive:

$$\fint_{-1}^{+1} \frac{m(t)}{1-\cos[\pi(t-s)]}\,\mathrm{d}t,$$

od anche:

$$I = \fint_{-1}^{+1} \frac{H(t,s)}{(t-s)^2}\,\mathrm{d}t,$$

dove

$$H(t,s) = \frac{(t-s)^2}{1-\cos[\pi(t-s)]} \sum_{k=0}^{N-1} c_k P_k(t),$$

avendo utilizzato la (17). L'integrale I è perciò:

$$I = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \fint_{-1}^{1} \frac{(t-s)^2}{1-\cos[\pi(t-s)]} \frac{P_k(t)}{(t-s)^2}\,\mathrm{d}t. \tag{18}$$

Collocando l'equazione come indicato in Appendice B negli zeri $s = s_m$ di $P_N(t)$, ciascun integrale I_{km} della (18) può essere calcolato con la formula di quadratura:

$$I_{km} = \sum_{i=1}^{M} w_i^I(s_m) \frac{(t_i - s_m)^2}{1-\cos[(\pi(t_i - s_m)]} P_k(t_i), \tag{19}$$

dove t_i rappresenta l'i-esimo zero del polinomio di Legendre $P_M(t)$. In generale è $M \neq N$ e spesso sono richiesti valori di M notevolmente maggiori di N garantire la convergenza del calcolo. L'espressione esplicita dei pesi usati nella (19) è stata desunta da [9]. Ulteriori dettagli in [11].

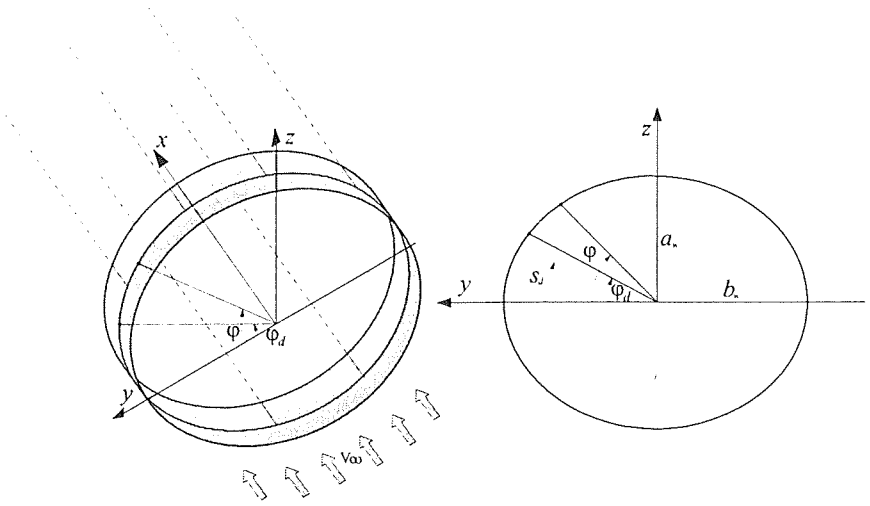

Figura 1. Ala anulare ellittica: notazioni e geometria.

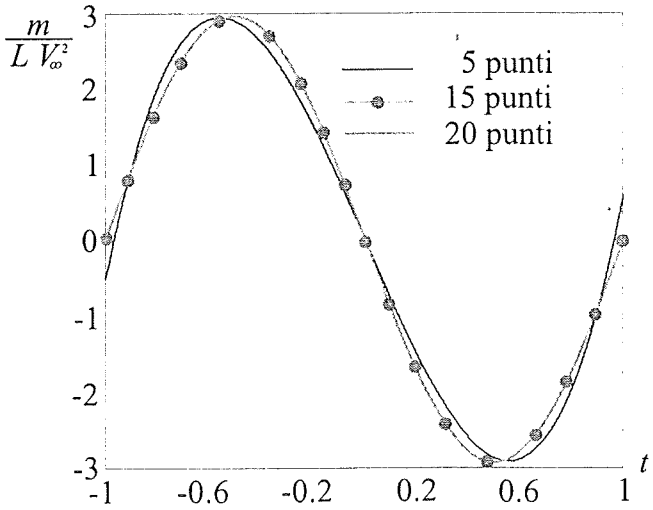

Figura 2. Convergenza numerica nel caso di ellisse tendente ad un cerchio $\frac{a_w}{b_w} \approx 1$.

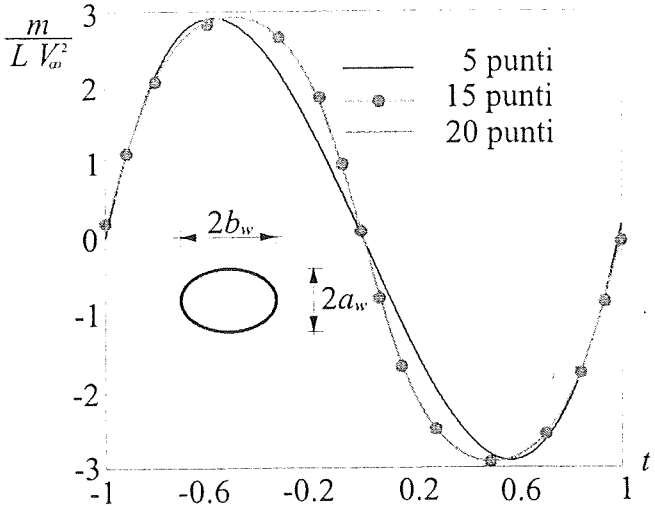

Figura 3. Convergenza numerica nel caso di ellisse con $\frac{a_w}{b_w} = \frac{8}{12}$

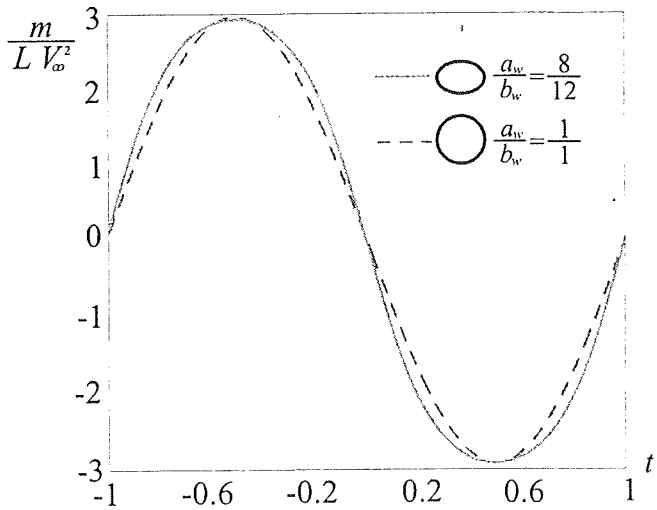

Figura 4. Confronto ala anulare circolare ed ellittica.

a_w/b_w	C_L	$10\ C_{D_i}$	
8/12	**4.92**	**3.9**	○
9/12	**4.85**	**3.6**	○
10/12	**4.77**	**3.3**	○
11/12	**4.70**	**3.0**	○
12/12	**4.63**	**2.8**	○

Figura 5. Coefficienti di portanza e resistenza indotta per diversi rapporti dei semiassi.