

Un modelo jerárquico basado en polinomios de Lagrange con aplicaciones a materiales compuestos

Sergio A. Minera
Departamento de Ingeniería Aeroespacial
Universidad de Bristol, U.K.

Escuela de Matemática
Universidad del Valle de Guatemala
Noviembre 2016

Contenido

- Proyecto *Fullcomp*
- Elasticidad
- Elementos Finitos
- Formulación unificada de Carrera
- Polinomios Jerárquicos de Lagrange
- Ejemplos 1
- Análisis de Estabilidad
- Ejemplos 2
- Referencias

Contenido

- ❑ Proyecto *Fullcomp*
- ❑ Elasticidad
- ❑ Elementos Finitos
- ❑ Formulación unificada de Carrera
- ❑ Polinomios Jerárquicos de Lagrange
- ❑ Ejemplos 1
- ❑ Análisis de Estabilidad
- ❑ Ejemplos 2
- ❑ Referencias

Proyecto Fullcomp

- FULLY integrated analysis, design, manufacturing and health-monitoring of COMPOSITE structures
- El proyecto FULLCOMP está auspiciado por la Comisión Europea bajo el programa *Marie Skłodowska-Curie Innovative Training Networks*.
- Socios del programa
 - Politecnico di Torino, Italia. Coordinador
 - University of Bristol, U.K.
 - Ecole Nationale Supérieure d'arts et Metiers, Francia
 - Leibniz Universität Hannover, Alemania
 - Universidad de Porto, Portugal
 - University of Washington, E.E.U.U.
 - RMIT, Australia
 - Luxembourg Institute of Technology, Luxemburgo
 - Elan-Ausy, Alemania



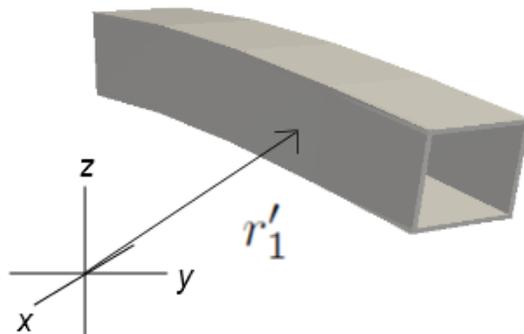
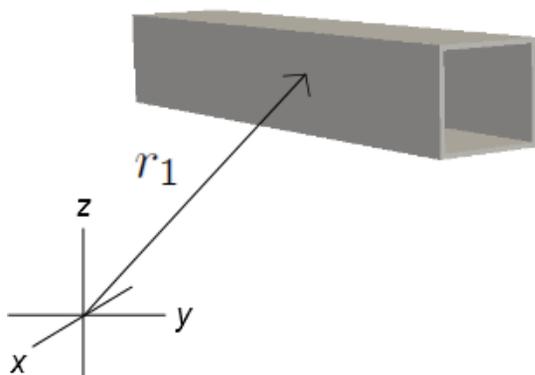
Proyecto Fullcomp

- Consta de 12 estudiantes de doctorado
- El proyecto incluye la fabricación, diseño, monitoreo, análisis de daños, modelación y experimentación de materiales compuestos.
- Sitio web www.fullcomp.net
 - Información
 - Publicaciones
 - Eventos
 - Contactos



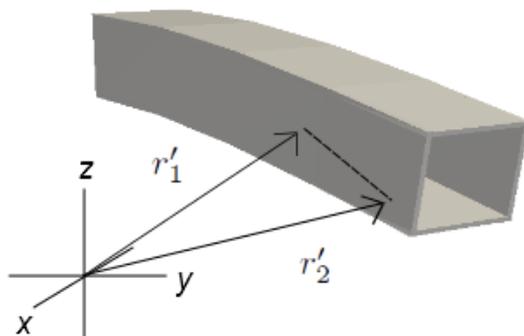
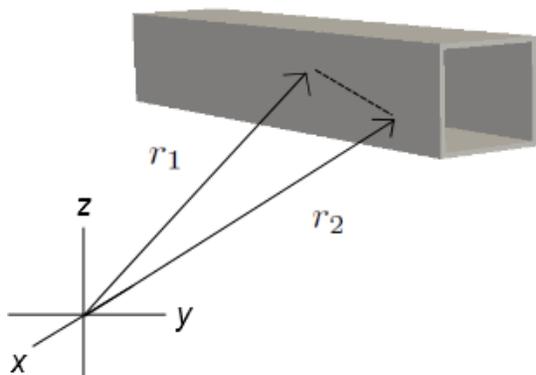
Contenido

- ❑ Proyecto *Fullcomp*
- ❑ **Elasticidad**
- ❑ Elementos Finitos
- ❑ Formulación unificada de Carrera
- ❑ Polinomios Jerárquicos de Lagrange
- ❑ Ejemplos 1
- ❑ Análisis de Estabilidad
- ❑ Ejemplos 2
- ❑ Referencias



$$\mathbf{u} = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1$$
$$u_i = x'_i - x_i$$
$$i, j = 1, 2, 3$$

Definición de Desplazamiento



$$dl'^2 = dl^2 + 2\varepsilon_{ij}dx_i dx_j$$
$$i, j = 1, 2, 3$$

Cambio infinitesimal de longitud

Geometría de un sólido deformado

$$dl'^2 = dl^2 + 2\varepsilon_{ij}dx_i dx_j \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right)$$

Tensor de Green o *Strain Tensor*

Expandiendo:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$

Términos de orden 2 se asumen pequeños

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

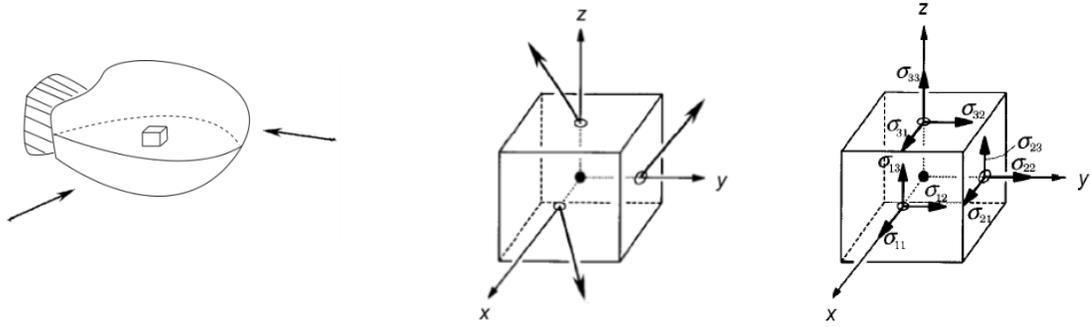
$\varepsilon = \mathbf{D}u$

3 componentes, (x,y,z) del desplazamiento

Nota: Se utilizaron las componentes ingenieriles, x,y,z en vez de 1,2,3 & u,v,w

Stress

- Consideremos un sólido al cual se le aplica una fuerza externa
- Y tomemos un elemento y la fuerzas por unidad de volumen que lo deforman



Componentes del Vector de área

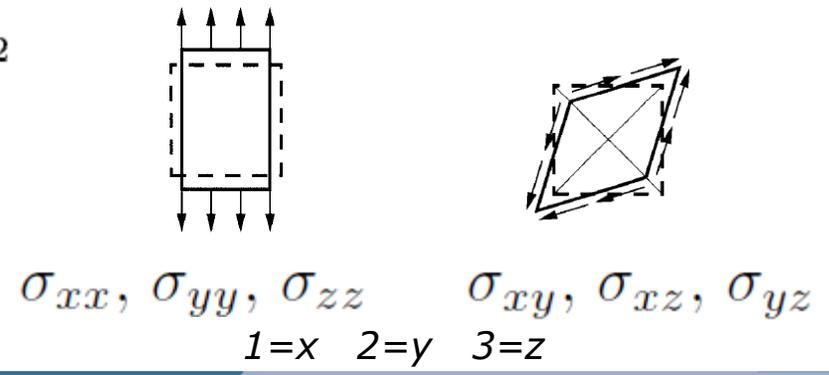
$$\int F dv = \int \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dv = \oint \sigma_{ij} ds_j$$

Fuerza por unidad volumen
Divergencia de un Tensor
Tensor de Stress

- Por conservación del momentum angular:
- Utilizando una notación alternativa (con precaución), se puede escribir:

$$\sigma_1 = \sigma_{11}, \sigma_2 = \sigma_{22}, \sigma_3 = \sigma_{33}, \sigma_4 = \sigma_{23}, \sigma_5 = \sigma_{13}, \sigma_6 = \sigma_{12}$$

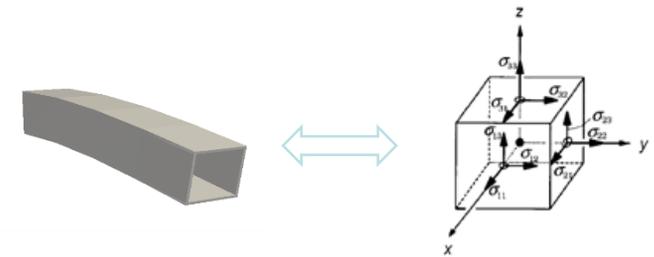
Notación de Voigt-Kelvin



Ecuación constitutiva. Ley de Hooke

- Se necesita una relación entre Strain y Stress, i.e. entre geometría y las fuerzas
- La relación se asume lineal:
 - Para muchas aplicaciones en ingeniería es suficiente, desde su diseño
 - Si no se espera/necesita analizar daño o plasticidad, por ejemplo
 - Aún la linealidad es más compleja de lo que parece:

$$\sigma = \mathbf{C} : \varepsilon + \sigma^0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \sigma_{ij}^0, \quad \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$$



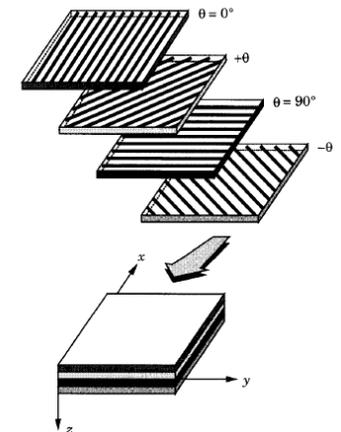
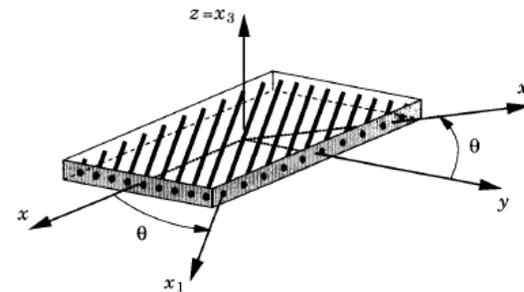
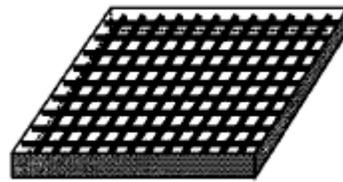
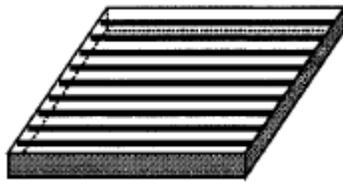
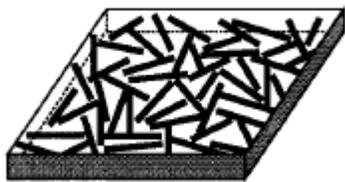
- C es un tensor de orden 4.
- Si se utiliza notación de un solo índice entonces se escribe (no se transforma como un tensor)¹

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_1^0 \\ \sigma_2^0 \\ \sigma_3^0 \\ \sigma_4^0 \\ \sigma_5^0 \\ \sigma_6^0 \end{Bmatrix}$$

1. Ver ref. Reddy

- Los coeficientes de C describen qué tan fuertes o débiles son los materiales en cada una de las direcciones (más de esto en los ejemplos)
- Materiales monoclinicos (coeficientes son iguales en cualquier par de sistemas simétricos respecto de un plano) ¹

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$



Ejemplo de materiales con diferentes coeficientes C

1. Ver ref. Reddy

Ecuación constitutiva. Ley de Hooke

- En notación matricial la relación entre geometría de la deformación y la respuesta del material sería:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad \sigma = \mathbf{C}\varepsilon$$

- Por ende se puede relacionar el estrés con los desplazamientos:

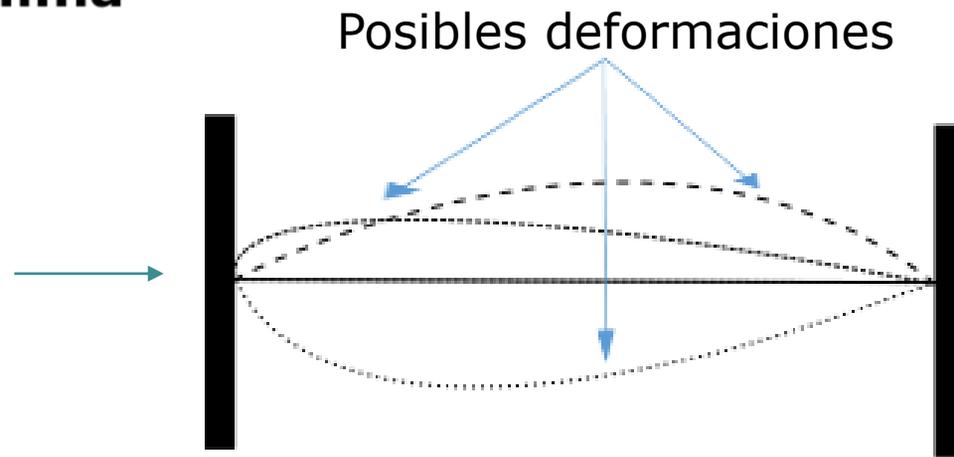
$$\sigma = \mathbf{C}(\mathbf{D}\mathbf{u})$$

- Estas tres relaciones servirán más adelante para representar el modelo numérico

Principio de desplazamientos virtuales ^{13/48}

- Una estructura deformada (debido a fuerzas externas) guarda energía potencial
- De todas las formas posibles, la estructura se deforma tal que la **energía potencial sea mínima**

Esencial que cumpla con las condiciones de frontera



- La (variación) de energía interna se puede escribir en términos de σ y ε :

$$\delta L_{\text{int}} = \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV$$

Principio de desplazamientos virtuales ^{14/48}

La variación del trabajo realizado por las fuerzas externas (incluyendo términos inerciales) es igual a la variación del trabajo interno

$$\delta L_{\text{int}} = \delta L_{\text{ext}} + \delta L_{\text{ine}}$$

- Trabajo interno:

$$\delta L_{\text{int}} = \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV \quad \xrightarrow{\text{utilizando}}$$

$$\delta \varepsilon = \delta [\mathcal{D}\mathbf{u}] \quad \xrightarrow{\text{Se tiene}} \\ = \mathcal{D}\delta\mathbf{u}$$



Variación de trabajo interno



Variación *strain*

$$\begin{aligned} \delta L_{\text{int}} &= \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV \\ &= \int_V \delta \varepsilon^T \mathbf{C} \varepsilon dV \\ &= \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathcal{D}^T \mathbf{C} \mathcal{D} \mathbf{u} dV \\ &= \delta \mathbf{u}^T \int_V \mathcal{D}^T \mathbf{C} \mathcal{D} dV \mathbf{u} \\ &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Matriz
3x3

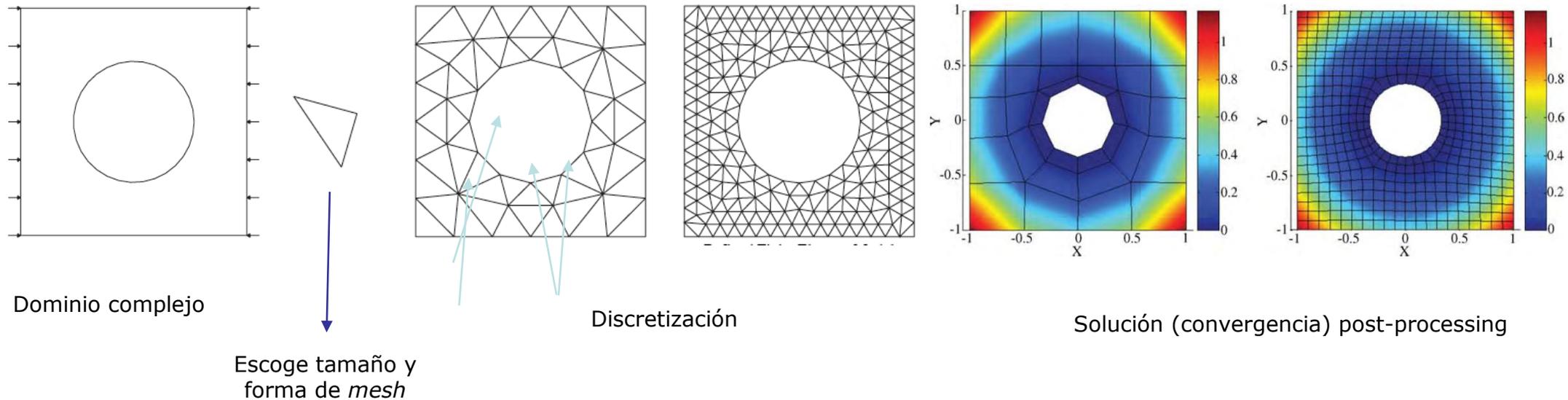
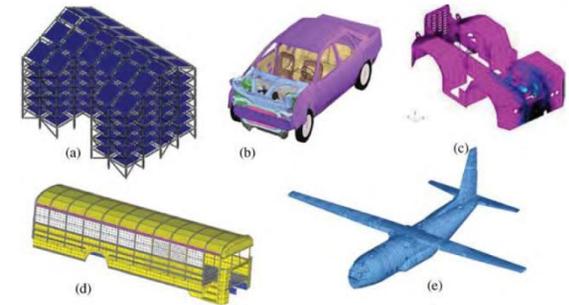
$$\begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{bmatrix}$$

Contenido

- ❑ Proyecto *Fullcomp*
- ❑ Elasticidad
- ❑ **Elementos Finitos**
- ❑ Formulación unificada de Carrera
- ❑ Polinomios Jerárquicos de Lagrange
- ❑ Ejemplos 1
- ❑ Análisis de Estabilidad
- ❑ Ejemplos 2
- ❑ Referencias

Elementos Finitos (*FEM*)

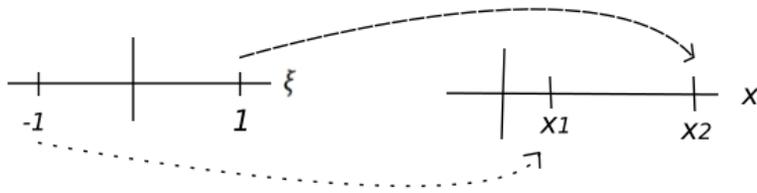
- Método numérico para resolver las ecuaciones (derivadas parciales usualmente)
- Dominios complejos que se discretizan
- Consta de tres partes (muy generalizadas):
 - Pre-procesamiento (*mesh*)
 - Solución (bastante compleja y computacionalmente exigente)
 - Post-procesamiento (análisis de resultados)²



2. Ver ref. Belytshko

Elementos finitos. Interpolación

- Lagrange 1D. Lineal

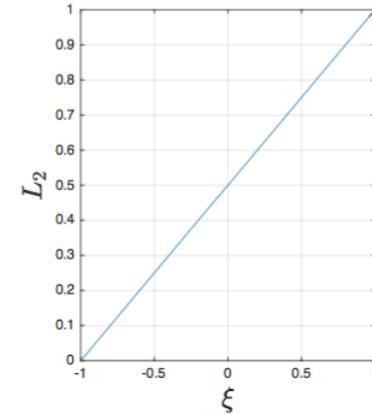
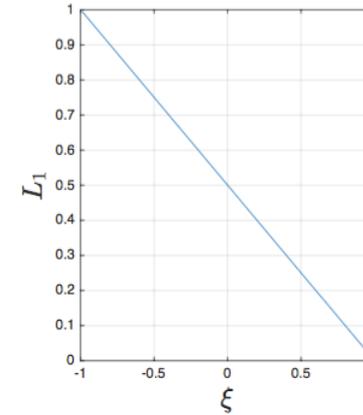


$$L_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

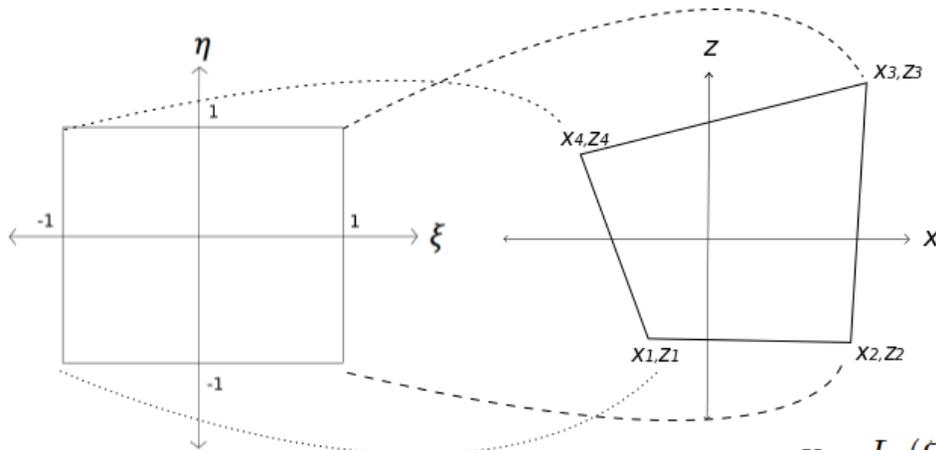
$$L_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

Transformación

$$x = L_1(\xi)x_1 + L_2(\xi)x_2$$



- Lagrange 2D. Lineal

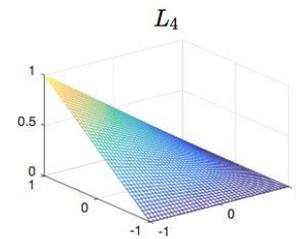
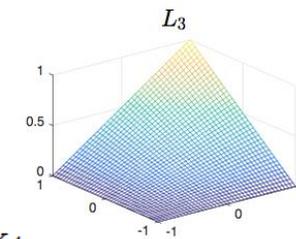
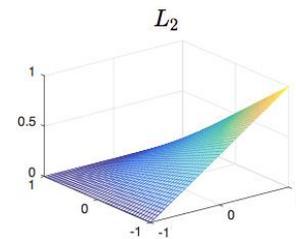
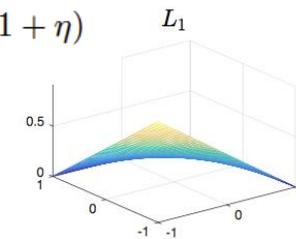


$$L_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad L_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$L_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad L_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

Transformación

$$\mathbf{x} = L_1(\xi, \eta)\mathbf{x}_1 + L_2(\xi, \eta)\mathbf{x}_2 + L_3(\xi, \eta)\mathbf{x}_3 + L_4(\xi, \eta)\mathbf{x}_4$$



Elementos finitos

- Utilizando la interpolación anterior (1D, 2D o 3D) para cada uno de los elementos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathcal{N}_i \mathbf{u}_i \quad i, j = 1, \dots, Nne \\ \delta \mathbf{u} &= \mathcal{N}_j \delta \mathbf{u}_j \\ \mathcal{N}_i &= \mathcal{N}_i(x, y, z) \end{aligned}$$

- N_i podrá ser cualquier versión de los polinomios anteriores
- Recordando y sustituyendo lo anterior

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} \\ \mathbf{K} \mathbf{u} &= \mathbf{F} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \delta \mathbf{u}_j^T \mathbf{K}^{ij} \mathbf{u}_i = \delta \mathbf{u}_j^T \mathbf{f}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

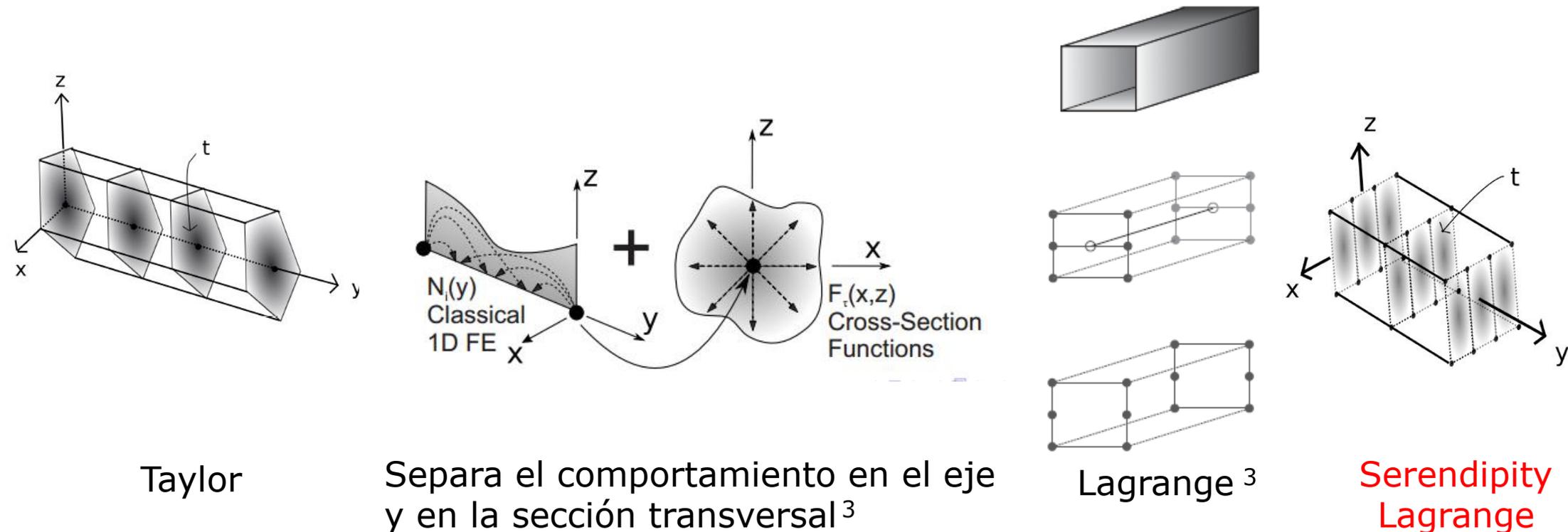
- ¡Matriz singular!
- Se deben aplicar condiciones de frontera
- Número de incógnitas: Grados de libertad (DOFs)
- Es usual tener órdenes de magnitud de 10^6 o 10^7 DOFs

Contenido

- ❑ Proyecto *Fullcomp*
- ❑ Elasticidad
- ❑ Elementos Finitos
- ❑ **Formulación unificada de Carrera**
- ❑ Polinomios Jerárquicos de Lagrange
- ❑ Ejemplos 1
- ❑ Análisis de Estabilidad
- ❑ Ejemplos 2
- ❑ Referencias

Carrera Unified Formulation (versión FEM) ^{21/48}

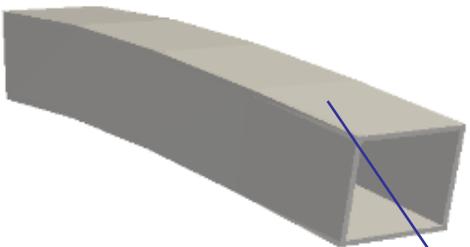
- Modelo estructural avanzado
- Modelos basados en elementos finitos:
 - Beam model (1D)
 - Plate and shell model (2D)
- Capacidades 3D, con mucho menos costo computacional ³



3. Ver ref. Carrera et al./www.mul2.polito.it

Carrera Unified Formulation. Expansión.

- ¿Cómo?



(u, v, w)
El desplazamiento
En cualquier punto

$$\mathbf{u} = \mathcal{N}_i \mathbf{u}_i \quad i, j = 1, \dots, Nne$$

$$\delta \mathbf{u} = \mathcal{N}_j \delta \mathbf{u}_j$$

$$\mathcal{N}_i = \mathcal{N}_i(x, y, z)$$



$$\mathcal{N}(x, y, z) = N(y)F(x, z)$$



$$\mathbf{u} = N_i(y)F_\tau(x, z)\mathbf{u}_{i\tau}$$

$$\delta \mathbf{u} = N_j(y)F_s(x, z)\delta \mathbf{u}_{js}$$

$$u = u_{i1}1 + u_{i2}x + u_{i3}z + u_{i4}x^2 + \dots u_{im}z^N$$

$$v = v_{i1}1 + v_{i2}x + v_{i3}z + v_{i4}x^2 + \dots v_{im}z^N$$

$$w = w_{i1}1 + w_{i2}x + w_{i3}z + w_{i4}x^2 + \dots w_{im}z^N$$

Taylor

$$u = u_{i1}L_1 + u_{i2}L_2 + u_{i3}L_3 + u_{i4}L_4$$

$$v = v_{i1}L_1 + v_{i2}L_2 + v_{i3}L_3 + v_{i4}L_4$$

$$w = w_{i1}L_1 + w_{i2}L_2 + w_{i3}L_3 + w_{i4}L_4$$

Lagrange

$$u = \sum_{k=1}^4 L_k(\xi, \eta)u_{xk}(y) + L_5^2(\xi, \eta)u_{x5}(y) + L_6^2(\xi, \eta)u_{x6}(y)$$

$$+ L_7^2(\xi, \eta)u_{x7}(y) + L_8^2(\xi, \eta)u_{x8}(y)$$

$$v = \sum_{k=1}^4 L_k(\xi, \eta)u_{yk}(y) + L_5^2(\xi, \eta)u_{y5}(y) + L_6^2(\xi, \eta)u_{y6}(y)$$

$$+ L_7^2(\xi, \eta)u_{y7}(y) + L_8^2(\xi, \eta)u_{y8}(y)$$

$$w = \sum_{k=1}^4 L_k(\xi, \eta)u_{zk}(y) + L_5^2(\xi, \eta)u_{z5}(y) + L_6^2(\xi, \eta)u_{z6}(y)$$

$$+ L_7^2(\xi, \eta)u_{z7}(y) + L_8^2(\xi, \eta)u_{z8}(y)$$

Serendipity
Lagrange

Carrera Unified Formulation.

- Recordando la variación del trabajo interno y sustituyendo la nueva interpolación:

$$\begin{aligned} \delta L_{\text{int}} &= \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV \\ &= \int_V \delta [\mathcal{D}\mathbf{u}]^T \mathbf{C} \varepsilon dv \\ &= \int_V \delta [\mathcal{D}\mathbf{u}]^T \mathbf{C} \mathcal{D}\mathbf{u} dv \end{aligned} \quad \begin{aligned} \delta L_{\text{int}} &= \delta \mathbf{u}_{js}^T \int_V (\mathcal{B}^{js})^T \mathbf{C} \mathcal{B}^{i\tau} dv \mathbf{u}_{i\tau} \\ &= \delta \mathbf{u}_{js}^T \mathbf{k}^{ij\tau s} \mathbf{u}_{i\tau} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k}^{ij\tau s} = \begin{bmatrix} k_{xx}^{ij\tau s} & k_{xy}^{ij\tau s} & k_{xz}^{ij\tau s} \\ k_{yx}^{ij\tau s} & k_{yy}^{ij\tau s} & k_{yz}^{ij\tau s} \\ k_{zx}^{ij\tau s} & k_{zy}^{ij\tau s} & k_{zz}^{ij\tau s} \end{bmatrix}$$

Matriz 3x3
Núcleo fundamental

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= N_i(y) F_\tau(x, z) \mathbf{u}_{i\tau} \\ \delta \mathbf{u} &= N_j(y) F_s(x, z) \delta \mathbf{u}_{js} \end{aligned}$$

- Un problema lineal típico ~ 150 integrales
- Un problema no lineal típico ~ 800 integrales
- Se evalúan numéricamente (solución exacta) mediante Cuadratura de **Gauss-Legendre**

9 componentes similares a estas:

$$\begin{aligned} k_{xx}^{ij\tau s} &= C_{11} \int_l N_i N_j dy \int_A F_{\tau,x} F_{s,x} dA + C_{66} \int_l N_{i,y} N_{j,y} dy \int_A F_\tau F_s dA + \\ &C_{55} \int_l N_i N_j dy \int_A F_{\tau,z} F_{s,z} dA + C_{16} \int_l N_i N_{j,y} dy \int_A F_{\tau,x} F_s dA + \\ &C_{16} \int_l N_{i,y} N_j dy \int_A F_\tau F_{s,x} dA \end{aligned}$$

Carrera Unified Formulation. Ensamble.

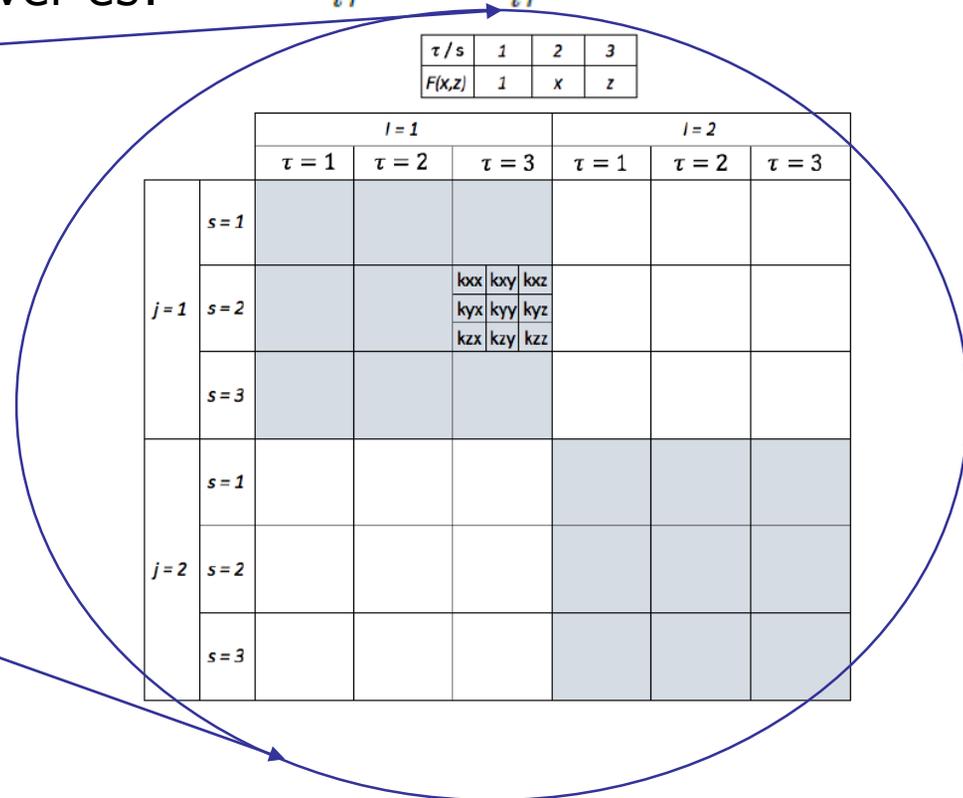
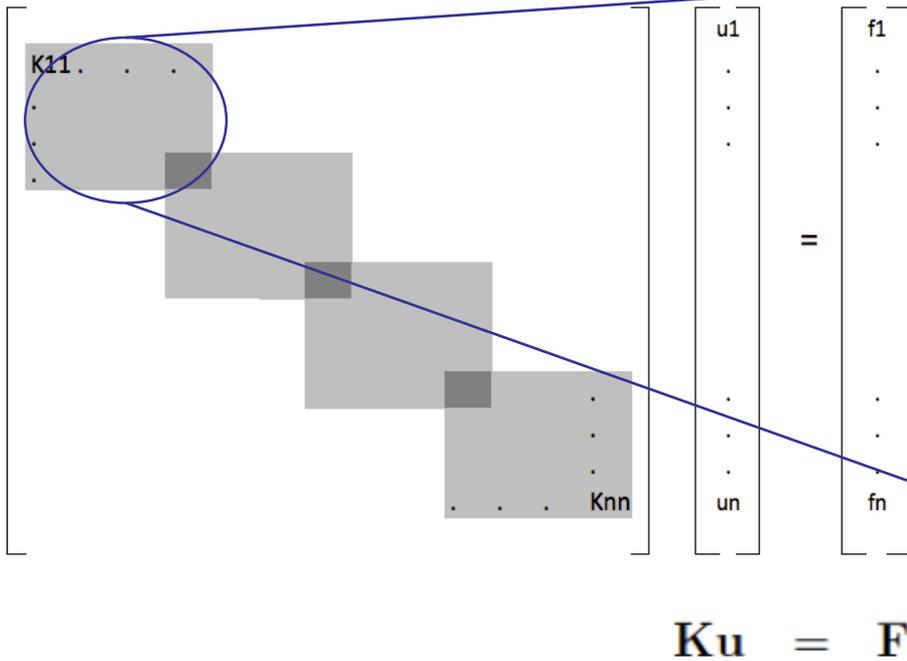
- Recordando ahora el Principio de Desplazamientos Virtuales

$$\delta L_{int} = \delta L_{ext}$$

- Y la expresión para el trabajo externo

$$\begin{aligned} \delta L_{ext} &= \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS + \int_L \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dy + \delta \mathbf{u}^T |_Q \mathbf{P} \\ &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \end{aligned}$$

- Entonces el sistema a (ensamblar) y resolver es: $\mathbf{K}^{ij\tau s} \mathbf{u}_{i\tau} = \mathbf{f}_{i\tau}$



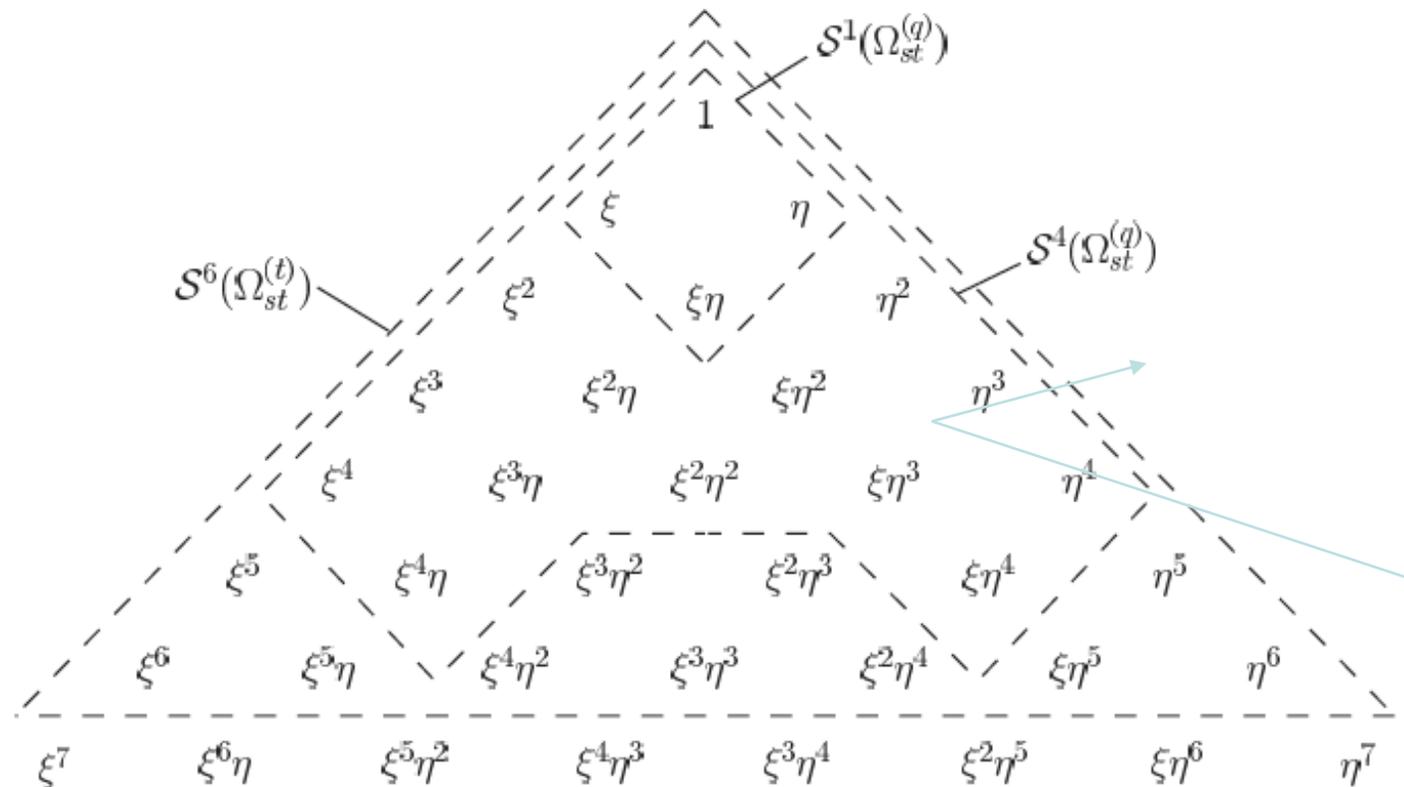
Contenido

- ❑ Proyecto *Fullcomp*
- ❑ Elasticidad
- ❑ Elementos Finitos
- ❑ Formulación unificada de Carrera
- ❑ **Polinomios Jerárquicos de Lagrange**
- ❑ Ejemplos 1
- ❑ Análisis de Estabilidad
- ❑ Ejemplos 2
- ❑ Referencias

Polinomios jerárquicos de Lagrange

- *Trunk Spaces (o Serendipity Spaces)*

- Espacios polinomiales definidos en el elemento isoparamétrico (cuadrilátero)
- Están generados por los monomios $\xi^i \eta^j$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, p$ sujetos a $i + j = 0, 1, 2, \dots, p$
- Se suplementan con uno o dos polinomios de grado
- Conjuntos generadores por grado polinomial⁴:

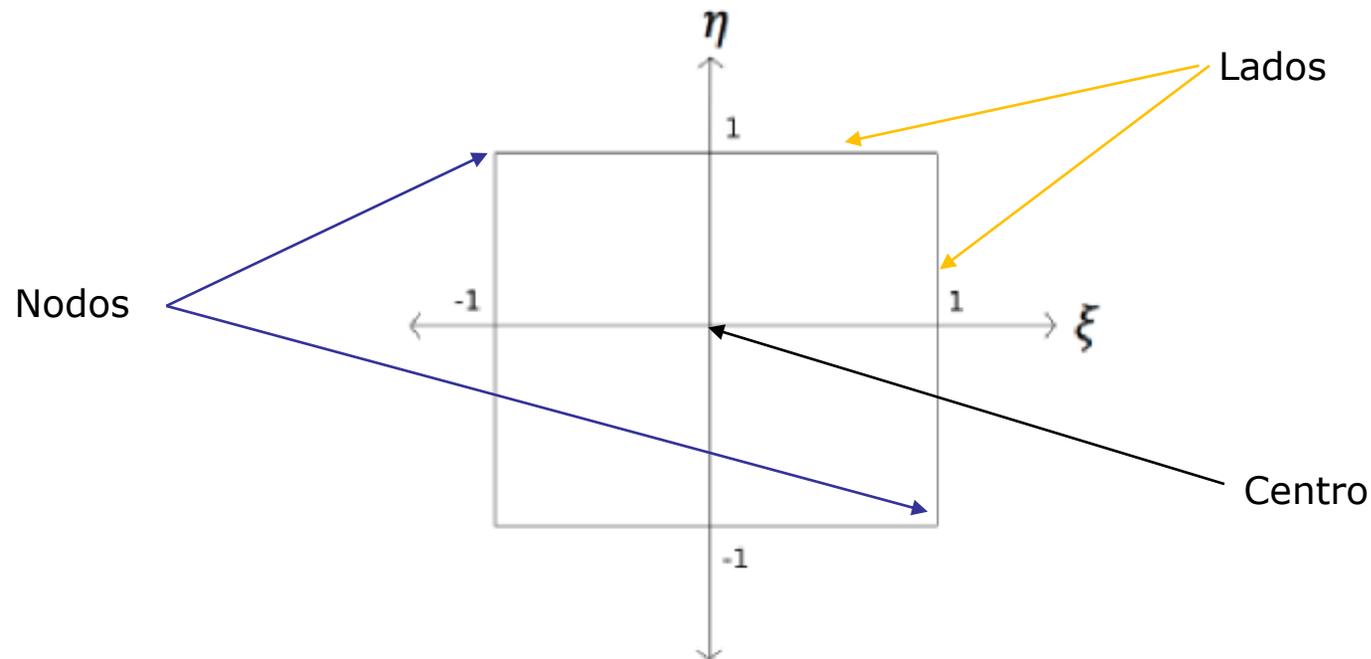


Serendipity Space. Conjuntos generadores

4. Ver ref. Szabó

Polinomios jerárquicos de Lagrange

- Idea: Construir polinomios 2D que cumplan lo siguiente:
 - Definidos en el cuadrilátero
 - Que cumplan con los conjuntos generadores
 - Orden 1: Sea 1 en un nodo y 0 cualquier otro
 - Orden 2-3: Sea 1 en un lado y 0 en cualquier otro
 - Orden 4: Sea 0 en los lados excepto en el centro*
 - Que sean de orden polinomial arbitrariamente alto



* Este comportamiento se deberá cumplir también para órdenes más altos.

Polinomios jerárquicos de Lagrange

Se comienza definiendo polinomios en 1D de la siguiente manera:

- Se considera el conjunto
- Se divide mediante los puntos

$$\xi_i = -1 + \frac{2}{n}(i - 1) \quad i = 1, \dots, n + 1.$$

- Que cumpla con

$$\begin{aligned} p_n(-1) &= 0 \\ p_n(1) &= 0 \\ p_n(\xi_i) &= 0 \end{aligned}$$

- La forma del polinomio será

$$p_n(\xi) = (\xi + 1)(\xi - \xi_2) \cdots (\xi - \xi_{n-1})(\xi - 1)$$

- En palabras simples, se divide el conjunto en partes iguales y dichos puntos son los ceros del polinomio
- El número de términos depende del orden

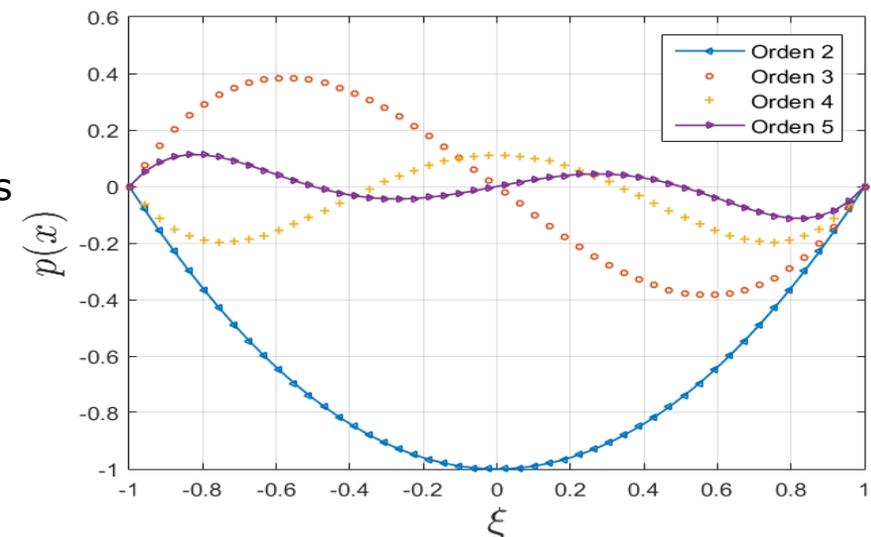
$$p_2(\xi) = (\xi + 1)(\xi - 1) \\ \xi^2 - 1$$

$$p_3(\xi) = (\xi + 1)\xi(\xi - 1) \\ \xi^3 - \xi$$

$$p_4(\xi) = (\xi + 1)\left(\xi + \frac{1}{3}\right)\left(\xi - \frac{1}{3}\right)(\xi - 1) \\ \xi^4 - \frac{10}{9}\xi^2 + \frac{1}{9}$$

$$p_5(\xi) = (\xi + 1)\left(\xi + \frac{1}{2}\right)\xi\left(\xi - \frac{1}{2}\right)(\xi - 1) \\ \xi^5 - \frac{5}{4}\xi^3 + \frac{1}{4}\xi$$

Primeros cinco polinomios



Polinomios jerárquicos de Lagrange

- Recordando, se desea
 - Cuatro polinomios lineales que sea 1 en un nodo y 0 en el resto. *Node expansions*.
 - Un conjunto de polinomios que sea 1 en un lado y 0 en el resto. *Side expansions*.
 - Un conjunto de polinomios que sea 0 en todos los lados, excepto en el interior. *Inner expansions*.
 - Todos de orden arbitrariamente alto

- Serendipity Lagrange (SL):**

$$L_{\tau}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_{\tau}\xi)(1 + \eta_{\tau}\eta)$$

$\tau = 1, 2, 3, 4$ $(\xi_{\tau}, \eta_{\tau})$ coord. nodos

Node expansions

$$L_i^n(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 \pm \eta)p_n(\xi)$$

$$L_j^n(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 \pm \xi)p_n(\eta)$$

$i = 5, 7, 9, 11, \dots etc.$ $j = 6, 8, 10, 12, \dots, etc.$

Side expansions

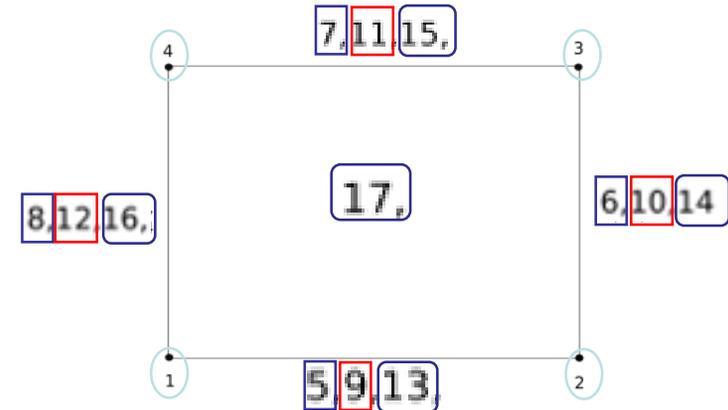
$$L_i^N(\xi, \eta) = p_n(\xi)p_m(\eta)$$

$i = 17, 22, 23, \dots, etc.$ $n \cdot m = N$

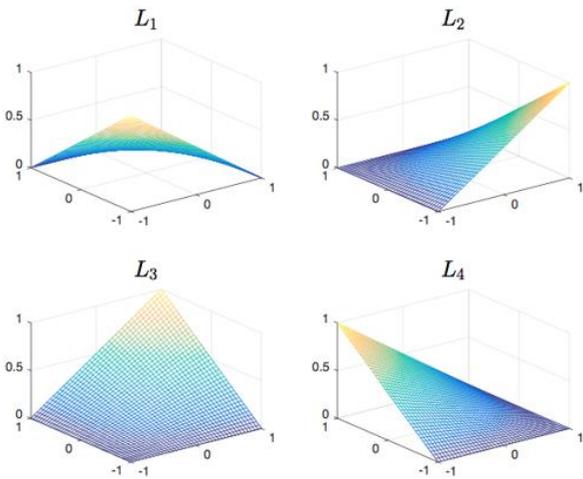
Inner expansions

- Numeración y orden de expansión**

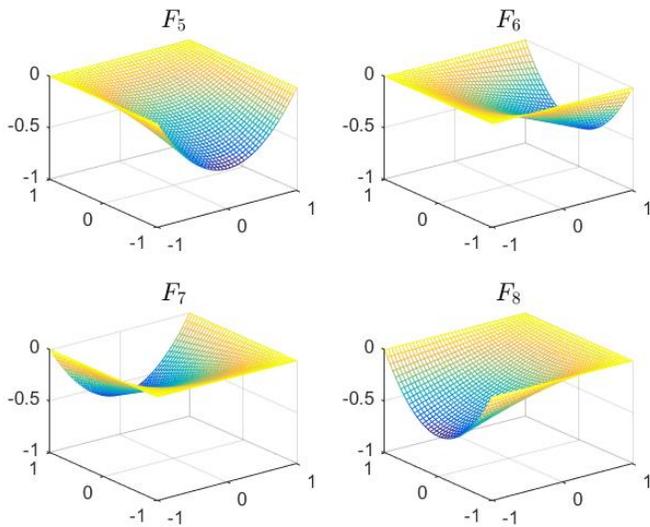
-  1,2,3,4 polinomios orden 1
-  5,6,7,8 polinomios orden 2
-  9,10,11,12 polinomios orden 3
-  13,14,15,16,17 polinomios orden 4



Polinomios jerárquicos de Lagrange

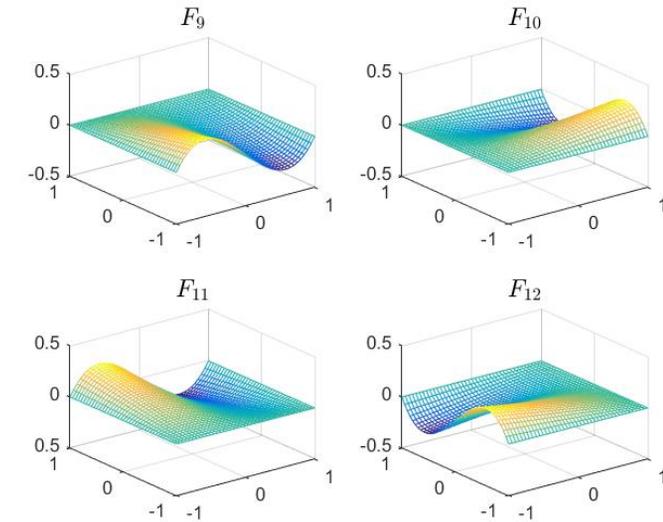


Orden 1

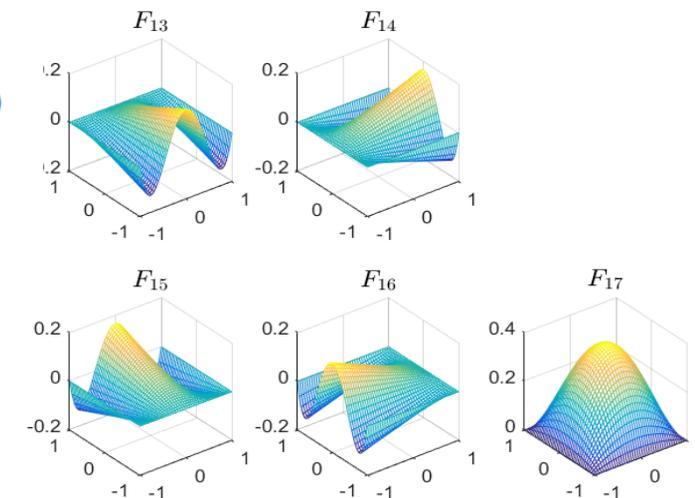


Orden 2

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{k=1}^4 L_k(\xi, \eta) u_{xk}(y) + L_5^2(\xi, \eta) u_{x5}(y) + L_6^2(\xi, \eta) u_{x6}(y) \\
 &\quad + L_7^2(\xi, \eta) u_{x7}(y) + L_8^2(\xi, \eta) u_{x8}(y) \\
 v &= \sum_{k=1}^4 L_k(\xi, \eta) u_{yk}(y) + L_5^2(\xi, \eta) u_{y5}(y) + L_6^2(\xi, \eta) u_{y6}(y) \\
 &\quad + L_7^2(\xi, \eta) u_{y7}(y) + L_8^2(\xi, \eta) u_{y8}(y) \\
 w &= \sum_{k=1}^4 L_k(\xi, \eta) u_{zk}(y) + L_5^2(\xi, \eta) u_{z5}(y) + L_6^2(\xi, \eta) u_{z6}(y) \\
 &\quad + L_7^2(\xi, \eta) u_{z7}(y) + L_8^2(\xi, \eta) u_{z8}(y)
 \end{aligned}$$



Orden 3



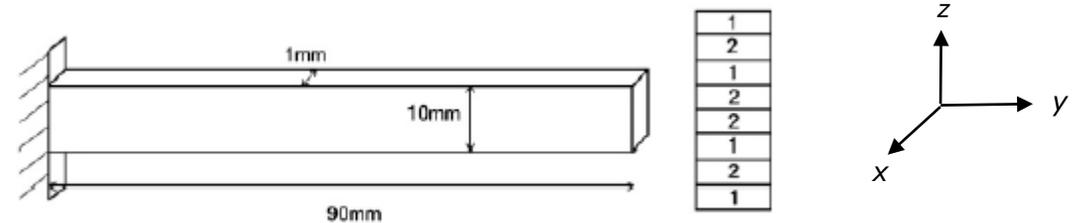
Orden 4

Contenido

- ❑ Proyecto *Fullcomp*
- ❑ Elasticidad
- ❑ Elementos Finitos
- ❑ Formulación unificada de Carrera
- ❑ Polinomios Jerárquicos de Lagrange
- ❑ **Ejemplos 1**
- ❑ Análisis de Estabilidad
- ❑ Ejemplos 2
- ❑ Referencias

Ejemplos numéricos. 8 – *layer beam*

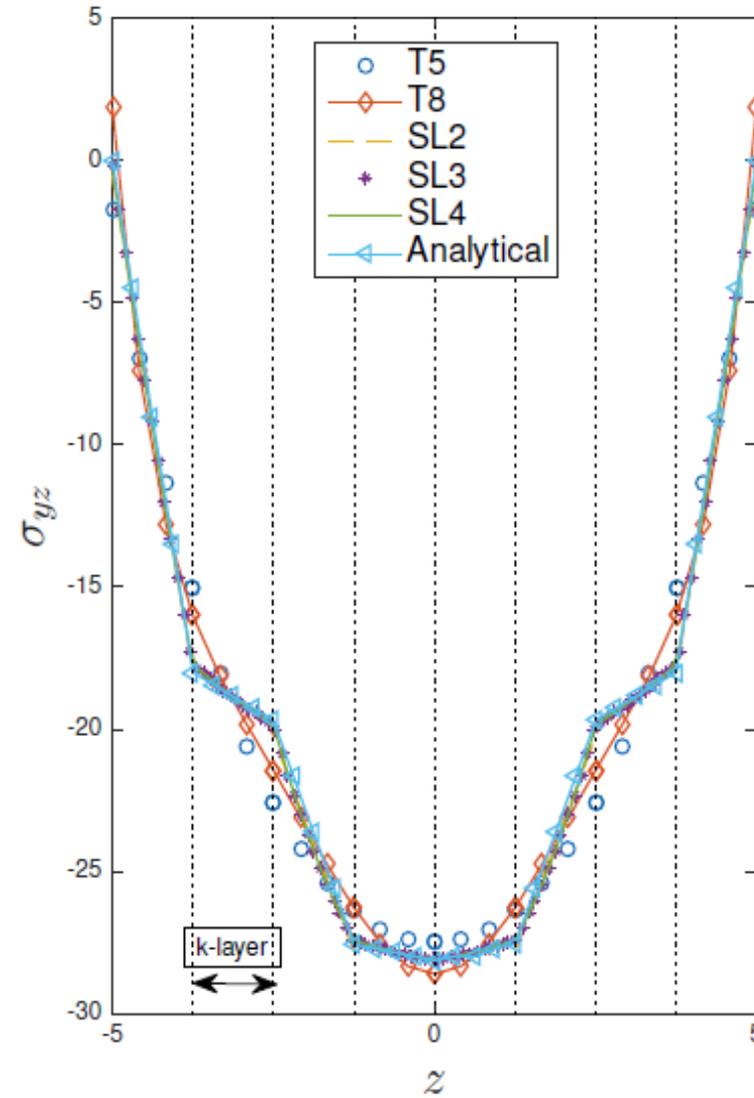
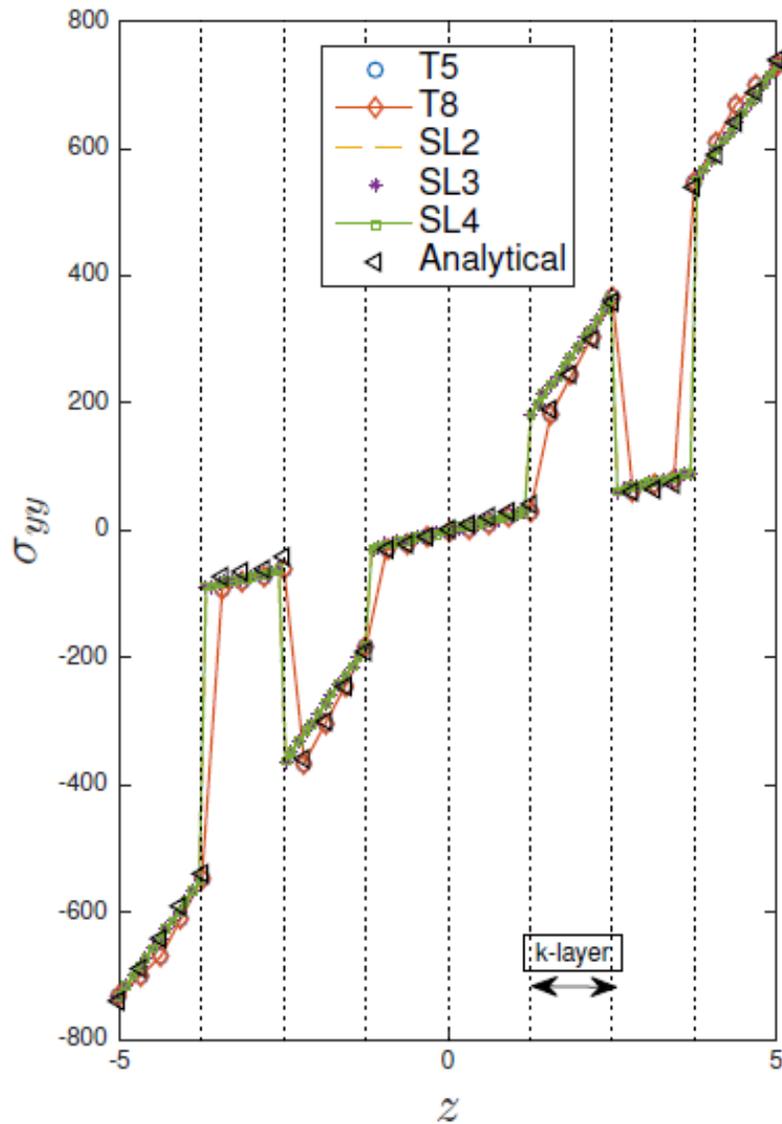
- Columna (*beam*) de 8 capas, 2 diferentes r
- Fija en un extremo, libre al otro
- Fuerza en dirección vertical en un extremo



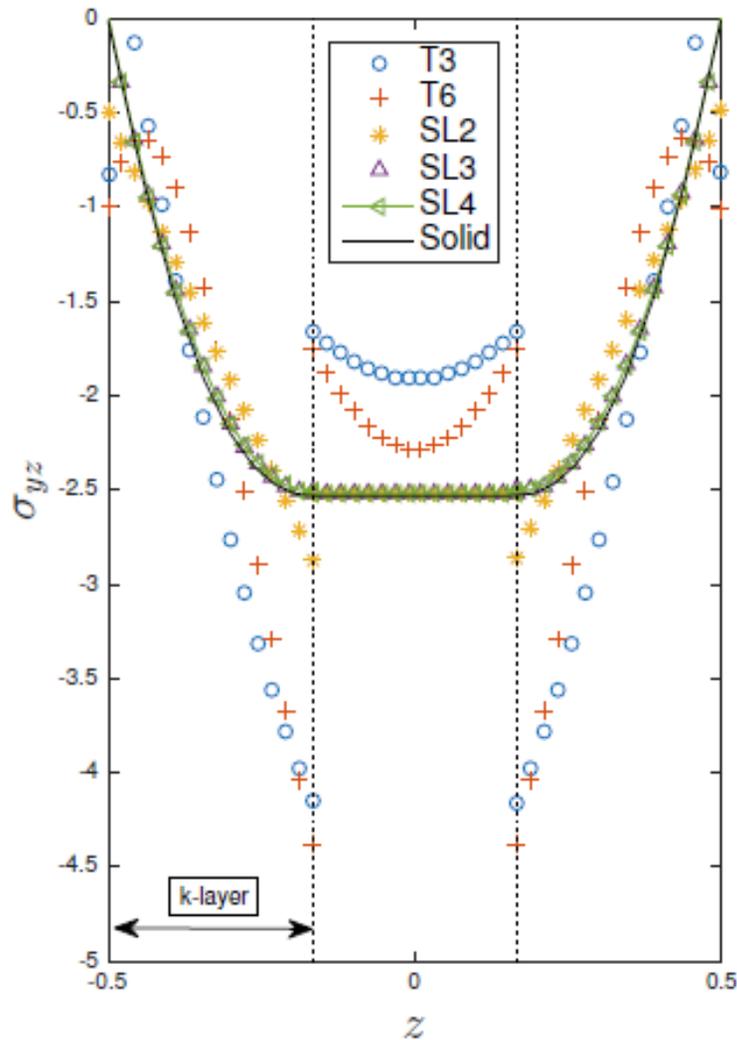
Model	$-u_z \times 10^5$ (m)	$-\sigma_{yy} \times 10^3$ (Pa)	DOFs
Susana et al. [10]	3.031	720	–
Davalos et al. [39]	3.029	700	–
Lin et al. [40]	3.060	750	–
Vo et al. [41]	3.024	–	–
EBBT	2.629	730.0	279
TBT	2.988	730.0	279
TE ₂	2.992	730.1	558
TE ₃	3.035	730.2	930
TE ₅	3.040	730.2	1953
TE ₈	3.046	730.2	4185
SL ₂	3.041	730.1	1290
SL ₃	3.041	730.1	2040
SL ₄	3.042	730.1	3030

u_z Displacements at tip and σ_{yy} values at mid span, composite cantilever beam

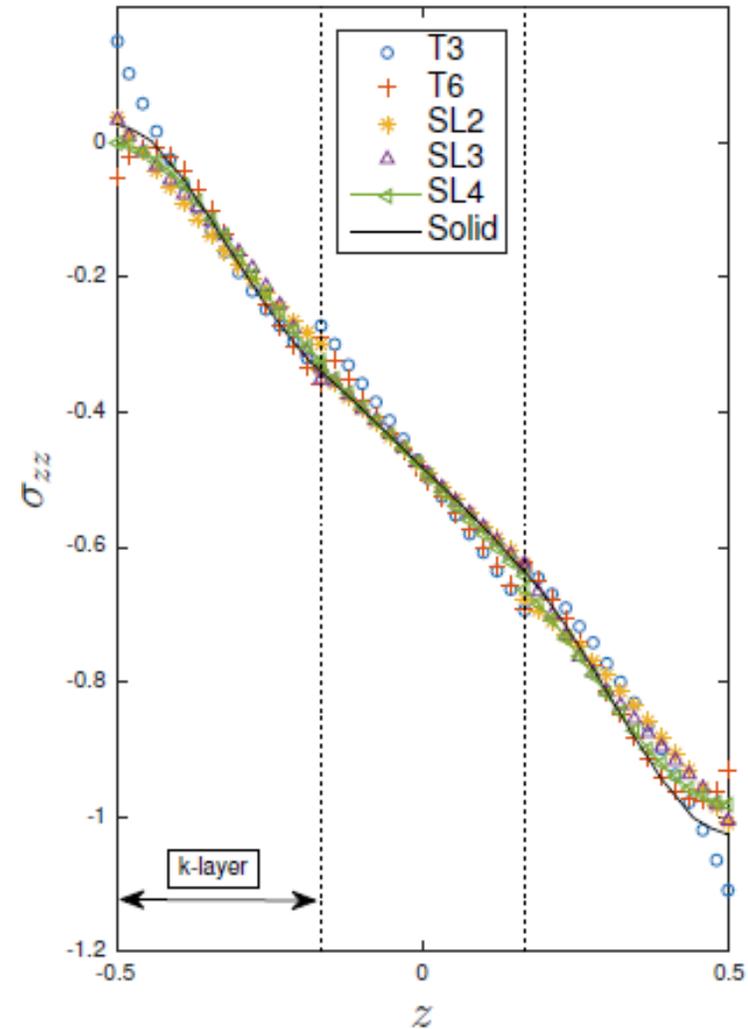
Ejemplos numéricos. 8 – *layer beam*



Symmetric composite plate (0-90-0) 35/48



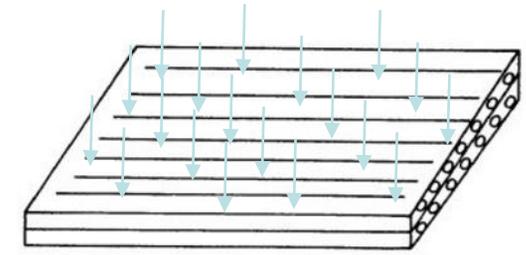
σ_{yz} vrs z of symmetric cross ply beam at $y = \frac{L}{2}$



σ_{zz} vrs z of symmetric cross ply beam at $y = \frac{L}{2}$

Anti-symmetric composite plate (0-90)

- Placa de material compuesto
- Fija en un extremo y libre en el otro
- Fuerza distribuida en la cara superior
- Mate



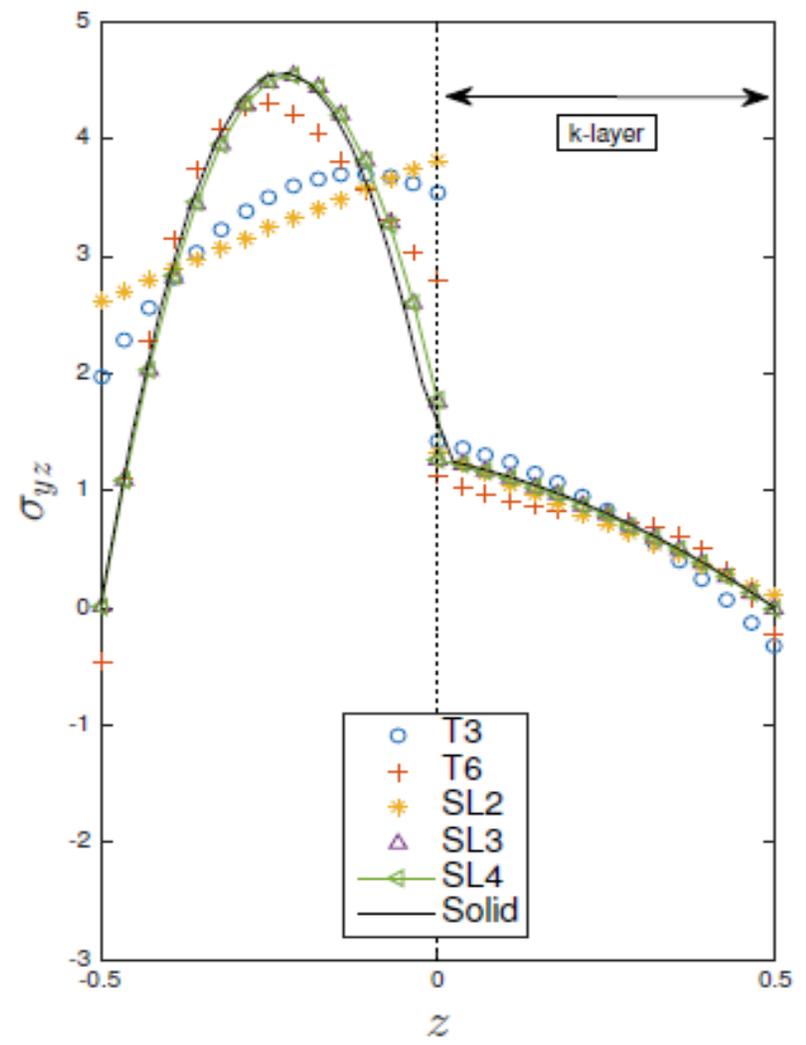
$$\frac{E_L}{E_T} = 25 \quad \frac{G_{LT}}{G_{TT}} = 2.5$$

$$G_{TT} = 0.2E_T \quad \nu_{LT} = 0.1 \quad \nu_{TT} = 0.3$$

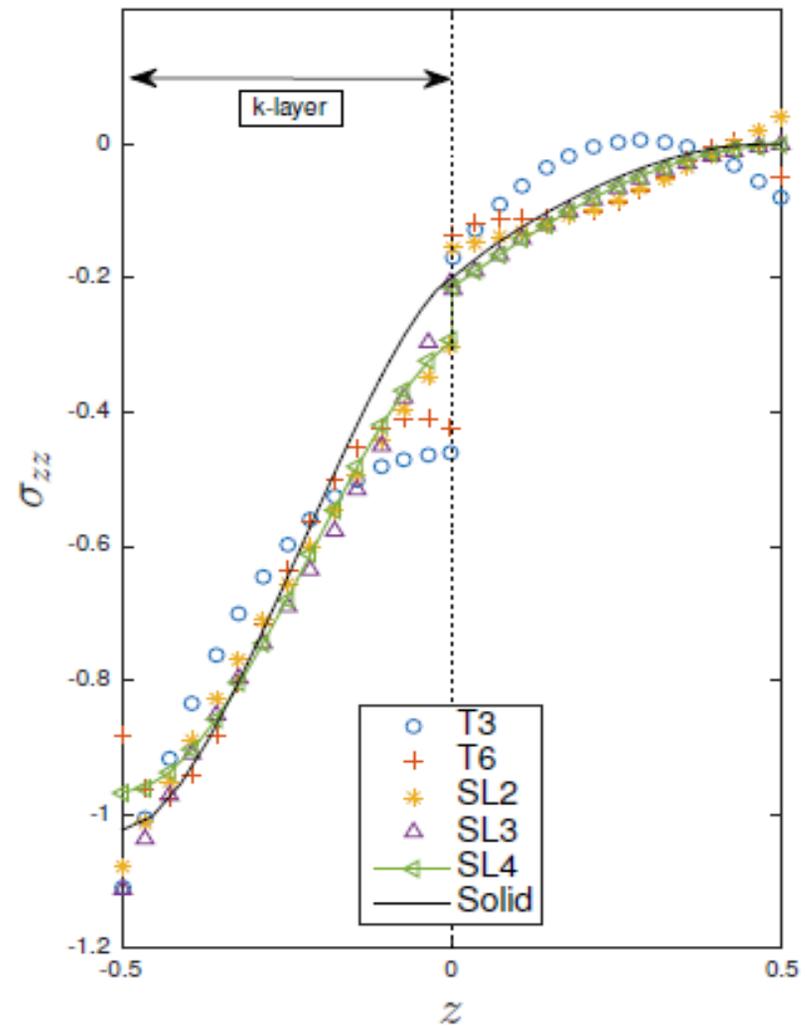
	0/90/0		0/90	
	u_z^*	$-\sigma_{zz}^*$	$-u_z^*$	$-\sigma_{zz}^*$
Solid [25]	17.98	1.03	43.09	1.02
TBT [25]	14.02	0	40.88	0
EBBT [25]	6.22	0	31.96	0
TE ₂	14.04	0.94	41.27	0.6
TE ₃	16.77	1.11	42.01	1.1
TE ₆	17.14	0.97	42.55	0.97
SL ₂	17.71	1.01	41.55	1.07
SL ₃	17.85	0.99	42.47	0.96
SL ₄	17.85	0.98	42.48	0.94
SL ₅	17.86	0.98	42.49	0.94
SL ₆	17.86	0.98	42.49	1.00

Non dimensional tip deflections w and stresses of laminated 0/90/0 and 0/90 beams.

Anti-symmetric composite plate (0-90)



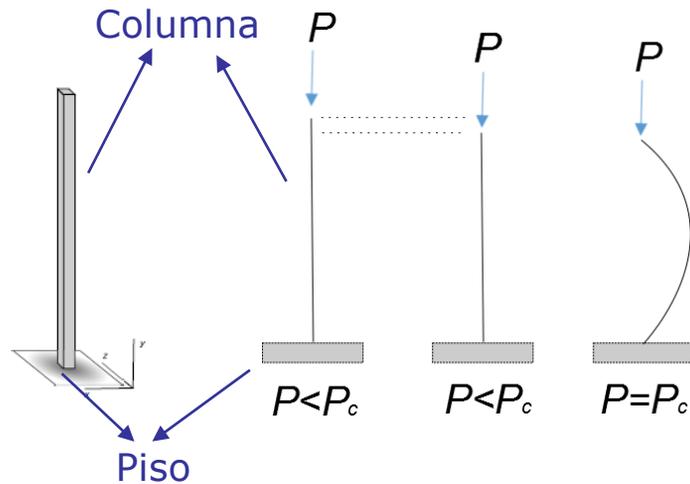
σ_{yz} vrs z of symmetric cross ply beam at $y = \frac{L}{2}$



σ_{zz} vrs z of symmetric cross ply beam at $y = \frac{L}{2}$

Contenido

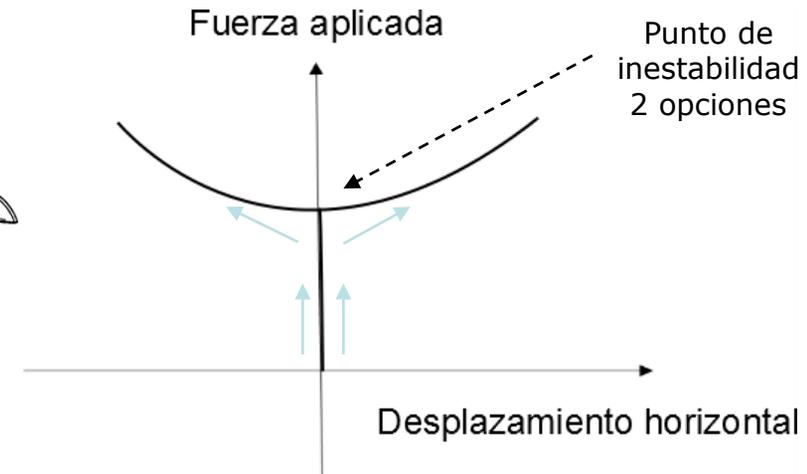
- ❑ Proyecto *Fullcomp*
- ❑ Elasticidad
- ❑ Elementos Finitos
- ❑ Formulación unificada de Carrera
- ❑ Polinomios Jerárquicos de Lagrange
- ❑ Ejemplos 1
- ❑ **Análisis de Estabilidad**
- ❑ Ejemplos 2
- ❑ Referencias



Fuerza P aplicada, creciente y relación con el valor crítico



Por lo que interesa es un análisis de estabilidad



Fuerza aplicada vrs desplazamiento horizontal (punto medio)

- Se aplica una fuerza en dirección axial
- Se acumula estrés axial, y los desplazamientos son axiales
- Al llegar al punto crítico, se manifiestan desplazamientos transversales
- Efecto puramente no-lineal (geométrico)

- La energía interna y externa se escriben de la siguiente manera (incrementos):

$$\int_V \delta \Delta \mathbf{e}^T \mathbf{C} \Delta \mathbf{e} dv + \int_V \delta \Delta \mathbf{e}^T \boldsymbol{\sigma}_t dv + \int_V \delta \Delta \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\sigma}_t dv = \delta \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}$$

- Utilizando la interpolación en CUF

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= N_i(y) F_\tau(x, z) \mathbf{u}_{i\tau} \\ \delta \mathbf{u} &= N_j(y) F_s(x, z) \delta \mathbf{u}_{js} \end{aligned}$$

- En punto crítico se tiene

$$\begin{aligned} \left(\int_V (\mathcal{B}^{js})^T \mathbf{C} \mathcal{B}^{i\tau} dv + \int_V \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\sigma}_{\text{critical}} \mathbf{I} dv \right) \mathbf{u}_{i\tau}^{(1)} &= \mathbf{f}_{\text{ext}} - \int_V \mathcal{B}^{js} \boldsymbol{\sigma}_t dv \\ \left(\int_V (\mathcal{B}^{js})^T \mathbf{C} \mathcal{B}^{i\tau} dv + \int_V \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\sigma}_{\text{critical}} \mathbf{I} dv \right) \mathbf{u}_{i\tau}^{(2)} &= \mathbf{f}_{\text{ext}} - \int_V \mathcal{B}^{js} \boldsymbol{\sigma}_t dv \end{aligned}$$

- Por lo que se puede estudiar como:

→ Estrés crítico

$$\det \left(\mathbf{K}^{ij\tau s} + \lambda \mathbf{K}_{\text{nl}}^{ij\tau s} \right) = 0$$

Eigenvalores y eigenvectores

- El problema de valores propios es

$$\det \left(\mathbf{K}^{ij\tau s} + \lambda \mathbf{K}_{nl}^{ij\tau s} \right) = 0$$

- Con la matriz geométrica dada por

$$\mathbf{k}_{nl}^{ij\tau s} = \begin{bmatrix} k_{nl}^{ij\tau s} & 0 & 0 \\ 0 & k_{nl}^{ij\tau s} & 0 \\ 0 & 0 & k_{nl}^{ij\tau s} \end{bmatrix}$$

Depende del estado de estrés

$$\begin{aligned} k_{nl}^{ij\tau s} = & \int_V \sigma_{xx} N_i N_j F_{\tau,x} F_{s,x} dv + \int_V \sigma_{yy} N_{i,y} N_{j,y} F_{\tau} F_s dv + \\ & \int_V \sigma_{zz} N_i N_j F_{\tau,z} F_{s,z} dv + \\ & \int_V \sigma_{yz} (N_i N_{j,y} F_{\tau,z} F_s + N_{i,y} N_j F_{\tau} F_{s,z}) dv + \\ & \int_V \sigma_{xz} (N_i N_j F_{\tau,z} F_{s,x} + N_i N_j F_{\tau,x} F_{s,z}) dv + \\ & \int_V \sigma_{xy} (N_{i,y} N_j F_{\tau} F_{s,x} + N_i N_{j,y} F_{\tau,x} F_s) dv \end{aligned}$$

Con esta formulación es posible capturar comportamientos 3D y tomarlos en cuenta en el análisis de estabilidad

Eigenvalores: fuerza (*stress*) crítica

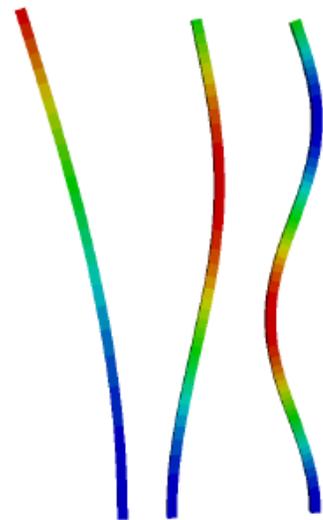
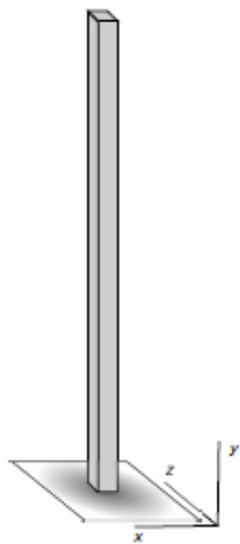
Eigenvectores: forma de estructura deformada

Contenido

- ❑ Proyecto *Fullcomp*
- ❑ Elasticidad
- ❑ Elementos Finitos
- ❑ Formulación unificada de Carrera
- ❑ Polinomios Jerárquicos de Lagrange
- ❑ Ejemplos 1
- ❑ Análisis de Estabilidad
- ❑ **Ejemplos 2**
- ❑ Referencias

Ejemplos. Columna

- Columna con sección cuadrada, $L=10\text{m}$, $a=b=0.2\text{m}$
- Fija en un extremo, libre en el otro
- Fuerza axial
- Material isotrópico, $E=71.7\text{GPa}$, $\nu=0.3$



Beam first three buckling modes

	$\sigma_{\text{critical}}/10^6 \text{ Pa}$			
Euler (Analytical)	6.168			
Model	5 B4	10 B4	15 B4	20 B4
1L4	7.412	7.390	7.384	7.381
2 × 2L4	6.537	6.505	6.495	6.491
1L9	6.235	6.199	6.189	6.184
1 × 2L9	6.234	6.199	6.188	6.183
2 × 2L9	6.234	6.199	6.188	6.183
TE ₂	6.235	6.199	6.189	6.184
TE ₃	6.234	6.199	6.188	6.183
TE ₄	6.234	6.199	6.188	6.183

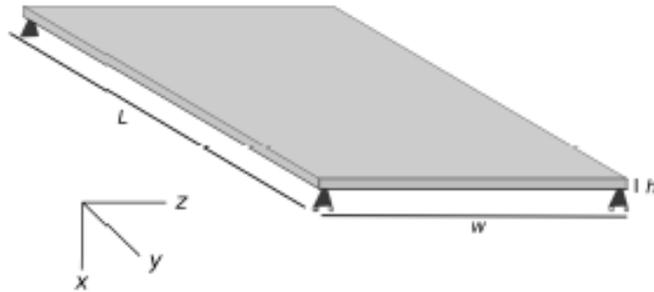
Table 1: Beam buckling load I

	$\sigma_{\text{critical}}/10^6 \text{ Pa}$			
Model	5 B4	10 B4	15 B4	20 B4
1L4	66.616	66.337	66.276	66.249
2 × 2L4	58.787	58.403	58.312	58.272
1L9	56.085	55.666	55.566	55.521
1 × 2L9	56.064	55.648	55.548	55.504
2 × 2L9	56.064	55.647	55.547	55.503
TE ₂	56.087	55.668	55.568	55.524
TE ₃	56.062	55.646	55.547	55.503
TE ₄	56.062	55.646	55.546	55.502

(a) Buckling load II

Ejemplo. Placa delgada.

- Placa delgada, $L=0.11\text{m}$, $w=0.025\text{m}$, $h=0.001\text{m}$
- Simplemente apoyada en sus extremos
- Fuerza axial
- Mismo material

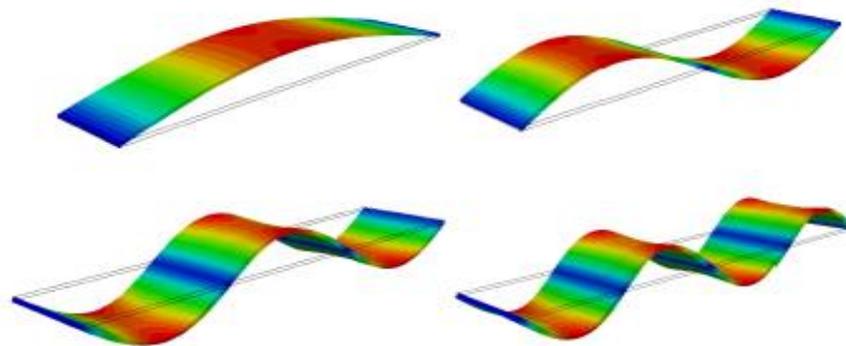


	$\sigma_{\text{critical}}/10^6 \text{ Pa}$			
	Load I	Load II	Load III	Load IV
FEM	5.93	24.03	54.76	98.25
1L9	5.93	24.07	54.96	98.83
$2 \times 3L9$	5.933	24.04	54.81	98.38

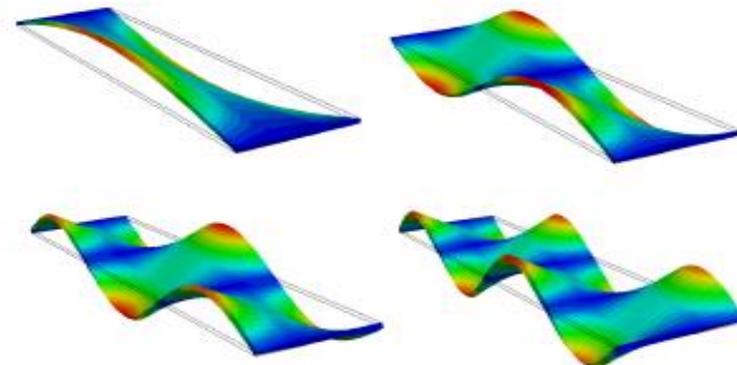
Plate first four bending buckling loads.

	$\sigma_{\text{critical}}/10^6 \text{ Pa}$			
	Load I	Load II	Load III	Load IV
FEM	181.61	198.78	229.16	272.31
1L9	180.83	199.99	231.85	276.22
$2 \times 3L9$	179.50	198.53	230.19	274.24

Plate first four twisting buckling loads.



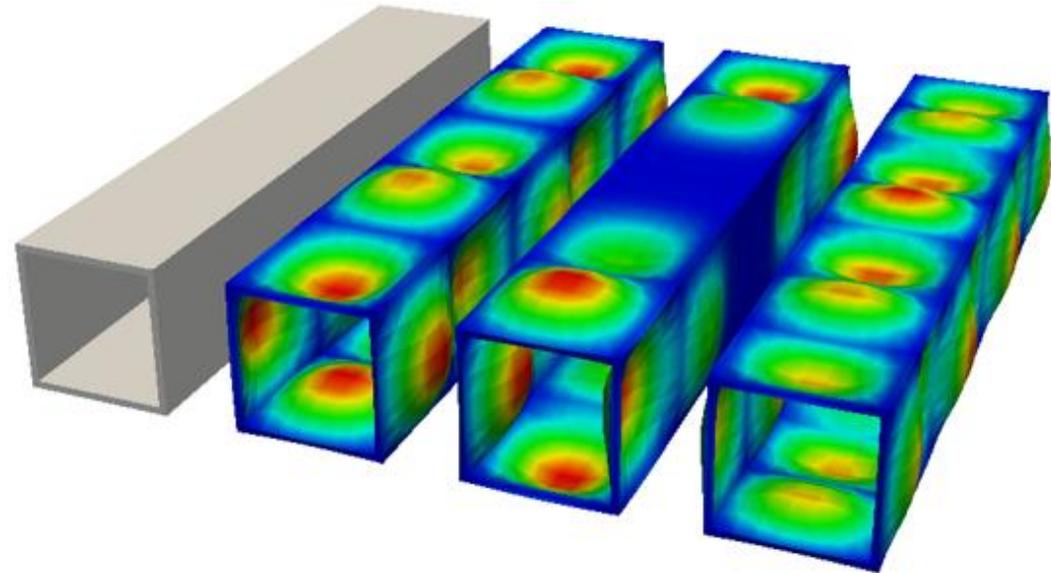
(a) Bending modes



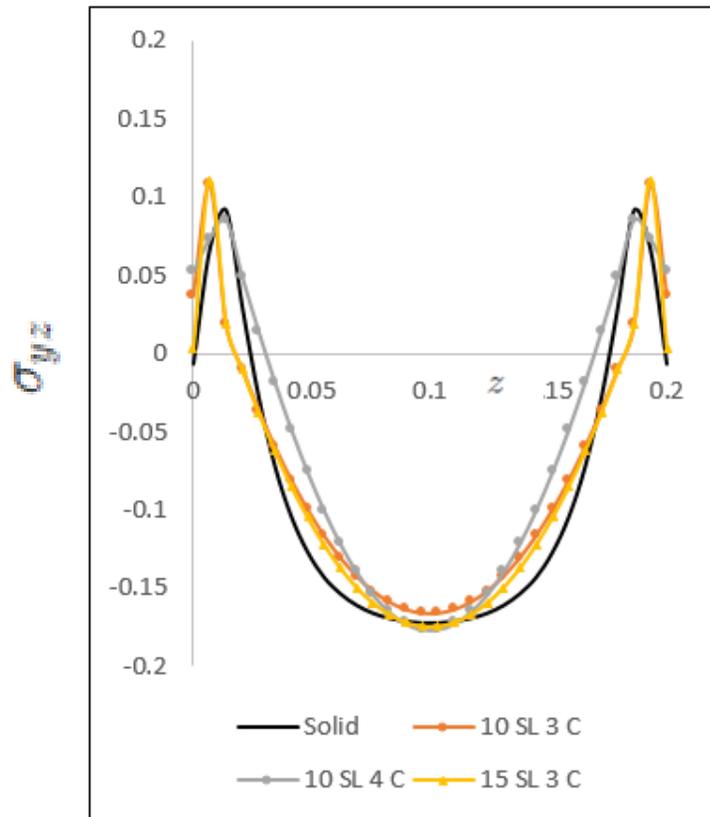
(b) Twisting modes

Ejemplo. Box

- Box, $L=1\text{m}$, $a=b=0.2\text{m}$
- Fija en un extremo, libre en el otro
- Fuerza axial
- Material isotrópico, $E=75\text{GPa}$, $\nu=0.33$



*Buckling modes
Eigenvectors*



Solid DOFs 1,006,848

SL DOFs 13,248

1% of DOFs

Buckling Loads	Solid	SL	%
1	755.033	753.121	0.25%
2	787.975	787.410	0.07%
3	811.943	810.699	0.15%
4	860.231	859.400	0.10%
5	923.821	924.362	-0.06%
6	1007.780	1012.260	-0.44%

Resultados con
1% de los recursos
computacionales

Contenido

- ❑ Proyecto *Fullcomp*
- ❑ Elasticidad
- ❑ Elementos Finitos
- ❑ Formulación unificada de Carrera
- ❑ Polinomios Jerárquicos de Lagrange
- ❑ Ejemplos 1
- ❑ Análisis de Estabilidad
- ❑ Ejemplos 2
- ❑ Referencias

Referencias

- J.N. Reddy. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis*. CRC Press, 2004.
- J. Fish and Ted Belytschko. *A first Course in Finite Elements*. John Wiley & Sons, Ltd. 2007.
- E. Carrera, M. Petrolo, M. Cinefra and E. Zappino. *Finite Element Analysis of Structures through Unified Formulation*. Wiley. 2014.
- B. Sbazó and I. Babuska. *Introduction to Finite Element Analysis, Formulation, Verification and Validation*. John Wiley and Sons, Ltd. 2011.

En memoria del Dr. Raúl González

